Loi de probabilité exponentielle, modèle de durée de vie sans vieillissement
Application à la loi de décroissance radioactive

Loi de probabilité exponentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Cette application, nulle sur $\mathbb{R}_-$, positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'intégrale égale à 1, définit une *densité de probabilité* sur $\mathbb{R}$. La probabilité d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est alors égale à $\int_a^b f(t)dt$ (que l'intervalle soit fermé ou non à gauche ou à droite car la probabilité d'un singleton, intervalle fermé réduit à un point, est nulle). En particulier, la probabilité, pour tout x de $\mathbb{R}$, de l'intervalle $]-\infty, x]$ est égale à $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \left(1-e^{-\lambda x}\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Définitions :

Une distribution de probabilité (ou loi de probabilité) de densité f est appelée *loi exponentielle de paramètre* λ et notée $\mathcal{E}(\lambda)$.

Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X suit une loi exponentielle de paramètre λ, noté $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si elle admet f pour densité, c'est-à-dire, si sa fonction de répartition (f.d.r.) définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \le x)$, s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \left(1-e^{-\lambda x}\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Propriétés :

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

(i) l'espérance mathématique (ou moyenne) et la variance de X vérifient :

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

(ii) la médiane, unique réel m vérifiant $F(m) = 0.5$, est égale à $\frac{\ln(2)}{\lambda}$

(iii) $\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ P(X > t+s / X > t) = P(X > s)$

(iv) $\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ P(X > t+s) = P(X > t)P(X > s)$

(v) $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h}\ P(t < X < t+h\ / X > t) = \lambda$

Modèle de durée sans vieillissement

La loi exponentielle est utilisée pour modéliser des "durées de vie sans vieillissement" (ou des "durées sans mémoire") ; en effet, on peut traduire l'hypothèse d'une durée de vie sans vieillissement par "la probabilité que la durée de vie soit supérieure à $t + s$ sachant qu'elle est supérieure à t ne dépend pas de t" ; on montre alors, en posant $t = 0$, que cette probabilité est égale à la probabilité que la durée de vie soit supérieure à s. Il s'agit de la propriété (iii) vérifiée par la loi exponentielle (et, caractéristique de la loi exponentielle, cf. ci-après).

Les v.a.r. étant positives, il est d'usage de ne définir la densité et la f.d.r. que sur $\mathbb{R}_+$ et d'introduire une nouvelle fonction, appelée *fonction de survie*, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$. Cette fonction, définie sur $\mathbb{R}_+$, est positive, continue, décroissante et vérifie $S(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

La propriété (iv) qui est de façon évidente équivalente à (iii) s'écrit alors : $\forall (t,s) \in \mathbb{R}_+^2 : S(t+s) = S(t)S(s)$.

On reconnaît une caractérisation de la *fonction exponentielle* (soit S une fonction définie sur $\mathbb{R}$, non nulle, continue et vérifiant $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2,\ S(t+s) = S(t)S(s)$ alors $\exists a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ S(x) = a^x$).

On montre que cette propriété (iv) caractérise la *loi de probabilité exponentielle* (soit X une v.a.r. positive, admettant une densité de probabilité (donc une fonction de répartition continue) et vérifiant $\forall (t,s) \in \mathbb{R}_+^2,\ P(X > t+s) = P(X > t)P(X > s)$, alors X suit une loi exponentielle).

La propriété (v) donne une interprétation du paramètre λ, il s'agit d'un *taux instantané de mortalité*, constant dans le temps (pas de vieillissement).

Cette propriété (v) peut être réécrite en utilisant la fonction de survie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de la manière suivante : $\forall t \in \mathbb{R}_+, S'(t) = -\lambda\, S(t)$.

On reconnaît une autre caractérisation de la *fonction exponentielle*, (la solution de cette équation différentielle du premier ordre est $\forall t \in \mathbb{R}_+, S(t) = e^{-\lambda t}$ car $S(0) = 1$).

On montre que cette propriété (v) caractérise la *loi de probabilité exponentielle* (soit X une v.a.r. positive, admettant une densité de probabilité, donc une fonction de répartition F continue, et dont l'application $S = 1 - F$ vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \lim\limits_{h \to 0_+} \dfrac{1}{h}\ P(t < X < t+h\ / X > t) = \lambda$, alors X suit une loi exponentielle).

Application à la loi de décroissance radioactive

La probabilité de désintégration d'un noyau radioactif dans un intervalle de temps de longueur fixée ne dépend pas de son "âge" ; la durée de vie d'un noyau radioactif avant désintégration peut donc être modélisée par une variable aléatoire réelle X de loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un paramètre réel strictement positif propre au type de noyau radioactif ; on verra plus loin qu'il a une unité de mesure qui dépend de celle de la durée X). On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+, P(X > t) = e^{-\lambda t}$.

On pose, $\forall t \in \mathbb{R}_+, Y(t) = \mathbf{1}_{[X > t]}$, indicatrice de l'événement "le noyau n'est pas encore désintégré à l'instant t" ; il s'agit d'une v.a.r. de loi de Bernoulli de paramètre $e^{-\lambda t}$.

On considère à présent N_0 noyaux radioactifs du même type (sans s'intéresser à leur âge puisque cela n'a pas d'influence) et on étudie l'évolution de ce nombre dans le temps ; pour $i \in \{1,\dots,N_0\}$, on note X_i la durée de vie du noyau i et Y_i le processus de Bernoulli associé. On suppose que les v.a.r. $(X_i)_{i \in \{1,\dots,N_0\}}$ sont indépendantes en probabilité ; il en est de même, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, des v.a.r. $(Y_i(t))_{i \in \{1,\dots,N_0\}}$.

On pose, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ Z(t) = \sum_{i=1}^{N_0} Y_i(t),$ nombre de noyaux radioactifs non encore désintégrés à l'instant t ; il s'agit d'une v.a.r. de loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda t}$ dont la moyenne, notée $N(t)$, vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$. Il s'agit de *la loi de décroissance radioactive du nombre de noyaux* .Intuitivement, si pour un noyau, la probabilité de ne pas être désintégré à l'instant t est égale à $e^{-\lambda t}$, pour N_0 noyaux radioactifs vérifiant la même propriété indépendamment les uns des autres, la proportion de noyaux non encore désintégrés à l'instant *t* est "en moyenne" égale à $e^{-\lambda t}$. (Le nombre (ou la proportion) de noyaux à l'instant *t* est une variable aléatoire ; la loi porte sur l'espérance mathématique de cette variable aléatoire. Dans le cadre d'expérimentation, on trouvera des valeurs approchées de cette fonction, non seulement à cause des erreurs de mesure mais aussi parce qu'il s'agit d'observations de variables aléatoires (incertitude due à l'échantillon).

Commentaires

Si la durée de vie est exprimée en seconde, alors la durée de vie moyenne d'un noyau radioactif (appelée "temps caractéristique" et égale à $1/\lambda$) et la durée de vie médiane (appelée "demi-vie" ou "période" et égale à $\ln(2)/\lambda$) sont exprimées en seconde ; le paramètre λ est donc exprimé en $(\text{seconde})^{-1}$. On peut aussi remarquer que, si *X* est la durée exprimée en seconde et si *Y* est la durée exprimée en minute, de lois exponentielles de paramètres λ_X et λ_Y respectivement, alors $X = 60\,Y$ et $\lambda_X = \dfrac{1}{60}\lambda_Y$.

Ce paramètre (dont la dimension est l'inverse de l'unité de temps) est appelé *constante radioactive*, il s'agit d'un *taux instantané de désintégration* et peut s'interpréter de la manière suivante : "la probabilité que le noyau se désintègre durant l'intervalle de temps Δt est $\lambda\,\Delta t$ (pour Δt petit)". Pour Δt = 1 la probabilité de désintégration d'un noyau pendant un intervalle de temps de longueur 1 n'est pas égale à λ mais à $1-e^{-\lambda}$ et il s'agit d'un nombre sans unité de mesure. (On a en effet : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ P\left(t < X < t+1 / X > t\right) = P\left(X < 1\right) = 1-e^{-\lambda}$). C'est la raison pour laquelle dire que λ est "la probabilité de désintégration d'un noyau par unité de temps" peut être mal interprété (la dimension de λ est bien l'inverse de l'unité de temps mais il ne s'agit plus d'une probabilité).

L'*activité* à l'instant *t*, notée $A(t)$, d'un échantillon de $N(t)$ noyaux radioactifs est le nombre de désintégrations par seconde *à cet instant*. Comme le nombre de noyaux désintégrés dans l'intervalle $[t, t+\Delta t]$ est (en moyenne) égal à $\lambda\, N(t)\,\Delta t$ (pour Δt petit). On a donc $N(t) - N(t+\Delta t) = \lambda\, N(t)\,\Delta t$ et l'activité vérifie $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ A(t) = -N'(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$.

Si l'on pose $A_0 = \lambda N_0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ A(t) = A_0\, e^{-\lambda t}$, il s'agit de *la loi de décroissance de l'activité radioactive.*

Ici encore, le *nombre de désintégrations par seconde à l'instant t* n'est pas *le nombre de désintégrations en une seconde* (donc dans l'intervalle $[t, t+1]$). On parle bien de $-N'(t)$ et non de $N(t) - N(t+1)$.