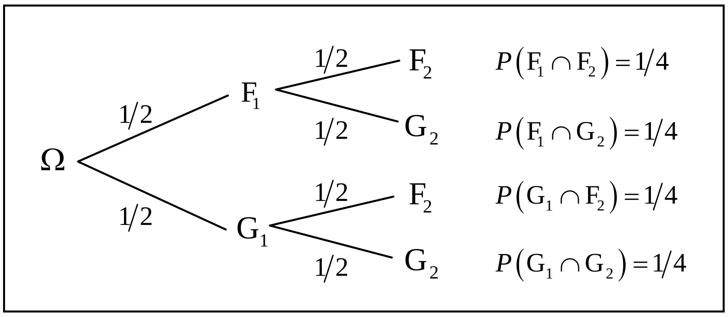
L'énigme de Sophie

(i) *Une famille a deux enfants, dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?*
(ii) *Une famille a 2 enfants, dont une fille qui se nomme Sophie. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?*

La solution attendue est 1/3 pour (i) et 1/2 pour (ii) … mais ça se discute !!

Préalable
Si l'on veut formaliser la constitution d'une famille de deux enfants, les événements en jeu sont les suivants :
"le premier enfant est une fille", noté F_1
"le premier enfant est un garçon", noté G_1 (on a $G_1 = \overline{F_1}$)
"le deuxième enfant est une fille", noté F_2
"le deuxième enfant est un garçon", noté G_2 (on a $G_2 = \overline{F_2}$)
Avec ces notations, les hypothèses s'écrivent :
(i) $P(F_1) = P(G_1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(F_2) = P(G_2) = \dfrac{1}{2}$
(ii) $P_{F_1}(F_2) = P_{F_1}(G_2) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{G_1}(F_2) = P_{G_1}(G_2) = \dfrac{1}{2}$.
À cette modélisation, est associé l'arbre de probabilité suivant, complété en utilisant la règle du produit.



On rappelle que si deux événements A et B sont indépendants en probabilité alors c'est aussi le cas de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B, enfin de $\overline{A}$ et $\overline{B}$. On dit alors que les partitions $\{A, \overline{A}\}$ et $\{B, \overline{B}\}$ sont indépendantes en probabilité.
C'est le cas ici de $\{F_1, G_1\}$ et $\{F_2, G_2\}$, traduit par l'hypothèse *(ii) le sexe du deuxième enfant ne dépend pas de celui du premier.*

La modélisation proposée permet de répondre aisément aux questions suivantes :

> *Une famille a deux enfants, dont l'enfant aîné est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?* (solution : $P_{F_1}(F_2) = 1/2$).
>
> *Une famille a deux enfants, dont l'enfant cadet est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?* (solution : $P_{F_2}(F_1) = 1/2$).:

Mais aussi à la question (ii)

> (ii) *Une famille a 2 enfants, dont une fille qui se nomme Sophie. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?* (solution : qu'elle soit l'aînée ou la cadette, la probabilité que Sophie ait une sœur est 1/2).

Dans les trois cas, on a identifié un des deux enfants et on sait que le sexe de l'autre ne dépend pas du sexe de l'enfant identifié : la probabilité que cet enfant ait une sœur est donc 1/2.

Revenons à l'énoncé (i)
(i) *Une famille a deux enfants, dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?*

Ainsi formulé, cet énoncé est ambigu. Des reformulations permettent de dégager deux sens.
Premier sens :

> "Une famille a deux enfants, dont une fille. Quelle est la probabilité que cette fille (celle dont on vient de parler) ait une sœur ?"

Deuxième sens :

> "Une famille a deux enfants, dont au moins une fille (c'est-à-dire une fille ou deux filles). Quelle est la probabilité que ce soit deux filles ?"

Dans le premier sens, quand on dit "une fille", le mot "une" est un article indéfini permettant de faire référence à une fille particulière dont on peut reparler après en disant "la fille", celle que l'on vient de citer. D'autant plus que la question est "*quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?*". "L'autre" renvoie à "la fille" citée dans la première partie de la question.
Dans le deuxième sens, le mot "une" désigne le cardinal d'un ensemble, encore qu'il faut sous-entendre ici "au moins une".

La réponse est 1/2 lorsque l'on comprend la phrase dans le premier sens.
La réponse est 1/3 lorsque l'on comprend la phrase dans le deuxième sens. En effet, la probabilité cherchée p est la probabilité, sachant que l'un des enfants est une fille, que l'autre enfant soit aussi une fille, c'est-à-dire, en utilisant la modélisation précédente :

$$p = P_{F_1 \cup F_2}\left(F_1 \cap F_2\right) = \frac{P\left(F_1 \cap F_2\right)}{P\left(F_1 \cup F_2\right)} \text{ car } \left(F_1 \cap F_2\right) \subset \left(F_1 \cup F_2\right)$$

La règle de la somme permet d'écrire :

$$P\left(F_1 \cup F_2\right) = P\left(F_1 \cap F_2\right) + P\left(F_1 \cap G_2\right) + P\left(G_1 \cap F_2\right) = \frac{3}{4}, \text{ d'où } p = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Commentaire
Lorsqu'on entend la phrase dans le deuxième sens, on a du mal à l'entendre dans le premier sens. On reste sur l'idée que s'il y a deux filles, parler d'une fille ne permet pas de savoir de laquelle il s'agit.
Pourtant, même en mathématiques, on passe de l'article "indéfini" à l'article "défini", par exemple : "il existe au moins un élément x appartenant à l'ensemble A ; si on prend l'image de x par l'application f on a … "
La morale de l'histoire est que le professeur de mathématiques doit faire bien attention à l'ambiguïté du langage courant …