**PLP2 Maths Sciences Physiques 1998**
**Analyse - Correction**

## Partie I.

### A/ Étude la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

**1. a/** $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 1$

**b/** $\forall x \in \mathbb{R}$ $F$ est dérivable et $F'(x) = \dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x) > 0$

$F$ est donc strictement croissante.

**c/**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'$ | | $+$ | |
| $F$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

**2.** $F$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ donc F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Soit $x \in ]0,1[$ $\quad x = \dfrac{e^y}{1+e^y} \Leftrightarrow e^y = \dfrac{x}{1-x}$ et $x \in ]0,1[ \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} > 0$.

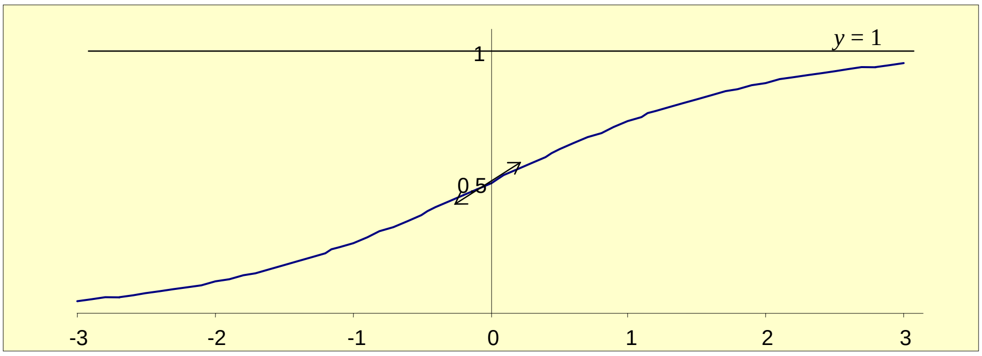
On en déduit : $y = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

La bijection réciproque $F^{-1}$ de $F$ est donc définie sur $]0,1[$ par $F^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

**3.** $\forall x \in \mathbb{R}$ $F'$ est dérivable et $F''(x) = \dfrac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$

La courbe représentative de $F$ admet un point d'inflexion de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ et la tangente en ce point a pour pente $F'(0) = \dfrac{1}{4}$.

De plus le calcul des limites au 1.a/ permet de conclure que la courbe admet deux asymptotes horizontales d'équations $y = 0$ (pour $x \to -\infty$) et $y = 1$ (pour $x \to +\infty$).



**B/ Soit *f* la dérivée de *F* définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^x}$.**

**1.** $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x}e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x)$, la fonction *f* est donc paire.

**2.** *f* est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
Si *A* et *B* sont deux réels tels que $A < B$ $\int_A^B f(x)dx = F(B) - F(A)$ et $\lim\limits_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)dx = 1$ donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente ( en $-\infty$ et en $+\infty$ ) et la somme est égale à 1.
La fonction *f* définit une densité sur $\mathbb{R}$.

**3.** Soit *X* une v.a.r. admettant *f* pour densité (et donc *F* pour fonction de répartition).

**3. a/** L'espérance mathématique de *X* existe si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx$ est convergente.

On a :

$$x f(x) = \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}$$

et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$ est convergente puisque $\forall \alpha > 1 \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^\alpha \frac{x}{e^x}\right) = 0$ (Cf. (*) à la fin du problème) donc $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente.

Comme on a $\int_{-\infty}^0 |x| f(x)dx = \int_0^{\infty} xf(x)dx$ on en déduit que *X* admet une espérance $E(X)$ et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 xf(x)dx + \int_0^{+\infty} xf(x)dx = 0$$

car la fonction qui, à *x* appartenant à $\mathbb{R}$, associe $xf(x)$ est impaire.

**3. b/** La fonction *F* est continue donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad P([X = x]) = 0$ et $P(X \geq 0) = 1 - F(0) = \frac{1}{2}$.

**3. c/** Les quartiles $q_i$ $(i \in [\![1,3]\!])$ vérifient $P([X \leq q_i]) = \frac{1}{4}$ c'est-à-dire $F(q_i) = \frac{i}{4}$.

La f.d.r. *F* étant bijective, on alors :

$$q_i = F^{-1}\left(\frac{i}{4}\right) = \ln\left(\frac{i/4}{1 - i/4}\right) = \ln\left(\frac{i}{4-i}\right)$$

On a donc $q_1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$, $q_2 = \ln 1 = 0$ et $q_3 = \ln 3$.

Arrondis au centième on obtient : $q_1 = -1.10$, $q_2 = 0$ et $q_3 = 1.10$.

**3. d/** $P(X \leq m) \geq 0.9 \Leftrightarrow F(m) \geq 0.9 \Leftrightarrow m \geq F^{-1}(0.9) = \ln 9$ car *F* (et donc aussi $F^{-1}$ ) est une fonction croissante.
Le plus petit réel *m* vérifiant $P(X \leq m) \geq 0.9$ est donc $\ln 9$ soit, arrondi au centième, 2.20.

## Partie II.

### A/ Existence et expression de la variance de *X*

**1.** Comme *X* admet une espérance mathématique nulle, la v.a.r. admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est convergente.

On a : $x^2 f(x) = \dfrac{x^2e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{e^x}$ et $\int_0^{\infty} \dfrac{x^2}{e^x}dx$ est convergente puisque $\forall\alpha > 1 \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{\alpha}\dfrac{x^2}{e^x}\right) = 0$

(Cf. (*) à la fin du problème) donc $\int_0^{\infty} x^2 f(x)dx$ est convergente.

Comme on a $\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx$ on en déduit que *X* admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

On a :

$$V(X) = E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$$

On pose $y = e^{-x}$ donc $x = -\ln y \quad dx = -\dfrac{dy}{y}$, on obtient alors une autre expression de la variance de *X* :

$$V(X) = 2\int_0^1 \left(\frac{\ln y}{1+y}\right)^2 dy$$

**2. a/** Soit *v* la fonction définie sur $]0,1]$ par $v(x) = \dfrac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)$.

Si on note w la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $w(x) = \dfrac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)$, alors *w* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\qquad w'(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$

On en déduit que pour tout *x* de $]0,1]$ $v'(x)$ existe et $v'(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$.

Comme on a $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$ et que $\int_0^1 dx$ converge, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ est convergente.

Comme on a pour tout *x* de $]0,1]$ $\left|\dfrac{\ln x}{1+x}\right| \le |\ln x|$ et que l'intégrale $\int_0^1 |\ln x| dx$ converge $(=1)$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1+x}dx$ est convergente.

On a : $V(X) = 2\int_0^1 \ln x \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx$

On pose : $u = \ln x$ et $dv = \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx$ ; on a alors $du = \dfrac{dx}{x}$ et $v = \dfrac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)$, d'où :

$$V(X) = 2\left[\frac{x(\ln x)^2}{1+x} - \ln x\ln(1+x)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\right)dx$$

On a :

$$\lim_{x\to 0_+}\left(\frac{x(\ln x)^2}{1+x}\right)=\lim_{x\to 0_+}\left(x(\ln x)^2\right)=0 \text{ et } \lim_{x\to 0_+}\left(\ln x\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0_+}\left(x\ln x\right)=0$$

car $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$.

On en déduit que le terme entre crochets est nul et :

$$V(X)=2\left[\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx\right]$$

**2. b/** On pose $I=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx$.

Dans la première intégrale on pose $u=\ln(1+x)$ et $dv=\frac{dx}{x}$.

On obtient $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\left[\ln(1+x)\ln x\right]_0^1-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx=-I$ car $\lim_{x\to 0_+}\left(\ln(1+x)\ln x\right)=0$ (Cf. ci-dessus).

On a donc $V(X)=-4I$.

## B/ Calcul des valeurs de *I* et de $V(\mathbf{X})$

**1. a/** On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad 1-x^{n+1}=(1-x)\left(1+x+\ldots+x^n\right)$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad 1-(-x)^{n+1}=(1+x)\left(1-x+\ldots+(-x)^n\right)$$

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\quad \frac{1}{1+x}=1-x+\ldots+(-x)^k+\ldots+(-x)^n+\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \frac{\ln x}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\ln x+\left(-1^{n+1}\right)\frac{x^{n+1}\ln x}{1+x}$$

donc aussi, en particulier, pour tout $x$ de $]0,1]$.

**1. b/** $\forall k\in\mathbb{N}$ et $\forall x\in]0,1]$ $\left|x^k\ln x\right|\le\left|\ln x\right|$ et $\int_0^1\left|\ln x\right|dx$ converge.

donc $\forall k\in\mathbb{N}$ $\int_0^1 x^k\ln x\,dx$ est convergente (on note $I_k$ sa valeur).

On pose : $u=\ln x$ et $dv=x^k dx$.

On obtient alors, pour $0<\varepsilon<1$,

$$I_k(\varepsilon)=\int_\varepsilon^1 x^k\ln x\,dx=\left[\frac{x^{k+1}\ln x}{k+1}\right]_\varepsilon^1-\frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 x^k dx$$

$$=-\frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1}-\left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_\varepsilon^1=-\frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1}+\frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

Comme on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon\right)=0$ on en déduit :

$$I_k=\lim_{\varepsilon\to 0}I_k(\varepsilon)=-\frac{1}{(k+1)^2}$$

**1.** **c/** On a pour tout $n$ : $\left| I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k \right| = \left| \int_0^1 \frac{x^{n+1} \ln x}{1+x} dx \right|$ d'après II.B.1.a/.

Pour tout $x$ de $]0,1]$ on a :

$$\left| \frac{x^{n+1} \ln x}{1+x} \right| \leq x^{n+1} |\ln x|$$

On en déduit :

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k \right| \leq \left| \int_0^1 x^{n+1} |\ln x| \, dx \right| = -I_{n+1} = \frac{1}{(n+2)^2}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k \right| \leq \frac{1}{(n+2)^2}$$

On en déduit, par passage à la limite :

$$\lim_{n \to \infty} \left| I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k \right| = 0$$

donc

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{-1}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est donc convergente, de somme égale à $I$.

**2.** On rappelle que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente, de somme égale à $\frac{\pi}{6}$ (Cf. (**) à la fin du problème).

On peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l)^2} + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l-1)^2}$$

et :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l)^2} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l-1)^2}.$$

On obtient ces deux égalités en séparant les termes correspondant aux entiers pairs de ceux correspondant aux entiers impairs ; les sommes étant finies on peut commuter les termes de ces sommes.

En faisant la somme membre à membre, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{1}{k^2} = 2\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l)^2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2}$$

soit encore :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2}$$

et en passant à la limite :

$$I = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$$

d'où la valeur de la variance de $X$ : $V(X) = \frac{\pi^2}{3}$.

*Remarque* : la série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ est finalement absolument convergente mais nous n'avons pas eu à utiliser cette propriété.

(*) <u>*Rappels*</u>

On admet $\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x}=0$, $\forall\alpha>0\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$, $\int_1^\infty \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^\alpha}$ est convergente pour $\alpha>1$, divergente pour $\alpha\leq 1$.

Enfin on admet, pour les fonctions positives, les règles de comparaison et des équivalents pour la convergence d'intégrale en $+\infty$.

On peut montrer <u>*la règle de Riemann*</u> :

Si *f* est une fonction numérique localement intégrable sur $[a,+\infty[$ ( $a>0$ ) et si $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^\alpha f(x)\right)=l\ \ (l\in\mathbb{R})$ alors $\int_a^\infty f(x)dx$ est absolument convergente si $\alpha>1$ et divergente si $\alpha\leq 1$ et $l\neq 0$.

On en déduit : $\forall\beta\in\mathbb{R}\ \int_1^\infty \dfrac{x^\beta}{e^x}dx$ converge (car $\forall\beta\in\mathbb{R}\ \forall\alpha>1\ \lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha\dfrac{x^\beta}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha+\beta}}{e^x}=0$ ) et $\forall\beta>1\ \int_1^\infty\dfrac{\ln x}{x^\beta}dx$ converge (car $\forall\alpha\in\left]1,\beta\right[\ \lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\beta-\alpha}}=0$).

De plus $\forall\beta\leq 1\ \int_1^\infty\dfrac{\ln x}{x^\beta}dx$ diverge.

On a évidemment des propriétés analogues pour une intégrale impropre de la forme $\int_a^b f(t)dt$ avec $b\in\mathbb{R}$, $b>a$ et *f* définie et localement intégrable sur $[a,b[$. L'intégrale $\int_a^b\dfrac{dx}{(b-x)^\alpha}$ est convergente pour $\alpha<1$ et divergente pour $\alpha\geq 1$. La règle de Riemann s'énonce alors :

Si $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^\alpha f(x)=l\ \ (l\in\mathbb{R})$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si $\alpha<1$ et divergente si $\alpha\geq 1$ et $l\neq 0$.

(**) <u>*Rappel de la preuve du résultat*</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $2\pi$ et telle que $f(x)=x^2$ pour tout $|x|\leq\pi$.

Cette fonction est continue et dérivable par morceaux, donc partout égale à la somme de sa série de Fourier.

On obtient, pour $|x|\leq\pi$ :

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Pour $x=\pi$ on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

et pour $x=0$ on retrouve :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$