PLP2 Maths Sciences Physiques 1998. Analyse.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans l'énoncé de ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

PARTIE I

A. *Etude d'une fonction F.*

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1. *a*. Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Etudier le sens de variation de F.
   c. Dresser le tableau de variation de F.

2. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0;1[$.
   Donner, pour tout x appartenant à $]0;1[$, une expression de $F^{-1}(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de F, dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

B. *Premières questions sur une variable aléatoire X introduite à partir de F.*

On désigne par f la fonction dérivée de F, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier la parité de f.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. On considère une variable aléatoire réelle X, qui admet comme densité de probabilité la fonction f. On note P la probabilité associée.
   a. Prouver que l'espérance mathématique de X existe. On la note $E(X)$.
   Déterminer la valeur de $E(X)$.
   b. Déterminer la valeur de $P(X \geq 0)$.
   c. Calculer les quartiles de X, c'est-à-dire les nombres réels $q_i \left(i \in \{1;2;3\}\right)$, tels que $P(X \leq q_i) = \dfrac{i}{4}$.
   (Pour chacun de ces nombres, on donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième).
   d. Déterminer le plus petit nombre réel m tel que $P(X \leq m) \geq 0.9$. (On donnera la valeur exacte de m et sa valeur arrondie au centième).

PARTIE II

Dans cette partie, X désigne toujours la variable aléatoire définie à la fin de la partie précédente.

A. *Existence et obtention d'une expression de la variance de X.*

1. Prouver que la variance de X existe et montrer qu'elle a pour valeur $2\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1+x}\right)^2 dx$. On la note $V(X)$.

2. *a*. Soit ν la fonction définie sur l'intervalle $]0;1]$ par $\nu(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x)$.

   Calculer, pour tout x appartenant à $]0;1]$, le nombre dérivé $\nu'(x)$.

   Après avoir justifié l'existence des intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ et $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$, en déduire que $V(X) = 2\left(\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx\right)$.

   b. On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$.

   Montrer que $V(X) = -4I$.

B. *Calcul des valeurs de I et de* $V(X)$.

Dans la suite, I désigne toujours l'intégrale définie à la fin de la partie précédente.

1. *a*. Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$,
   $\frac{\ln x}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k \ln x + (-1)^{n+1}\, x^{n+1} \frac{\ln x}{1+x}$.

   b. Prouver que, pour tout nombre entier naturel k, l'intégrale $\int_0^1 x^k \ln x\, dx$ existe.

   Calculer sa valeur, que l'on note I_k.

   c. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $\left| I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, I_k \right| \leq \frac{1}{(n+2)^2}$.

   En déduire que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, I_k$ est convergente, de somme égale à I.

2. On rappelle que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente, de somme égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

   Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

   En déduire la valeur de I, puis celle de $V(X)$.