

Préparation au Capes de Mathématiques

Probabilités - Problème sur les médianes - Correction

Préliminaires

Soit X une v.a.r. de type 1 et F sa f.d.r..

On pose, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $p_n = P(X = n)$ et $P_n = \sum_{k \leq n} p_k$.

On a : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n \mathbb{I}_{[n, n+1[}(x)$ (où $\mathbb{I}_A$ désigne l'indicatrice de l'ensemble A). La f.d.r. F est une fonction en escalier, croissante, positive, continue à droite en tout x de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$ et telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Soit X une v.a.r. de type 2, de f.d.r. F et de densité f .

On a : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_I f(x) dx = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

L'intervalle fermé I n'est pas réduit à un singleton ; on note $]a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, l'intérieur de I , alors $\forall x \in]a, b[$, F est dérivable en x et $F'(x) = f(x) > 0$. F est donc strictement croissante sur $]a, b[$. On a de plus $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = 1$ et F continue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$. Etant continue et strictement croissante sur $]a, b[$, F définit une bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$.

I.1. Soit X une v.a.r. de type 2.

Sa f.d.r. F étant continue sur $\mathbb{R}$, on a : $M(X) = \{m \in \mathbb{R}; F(m) = \frac{1}{2}\} = F^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.

F réalisant une bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$, il existe un unique élément m_0 de $]a, b[$ vérifiant $F(m_0) = \frac{1}{2}$; de plus, si l'ensemble $\mathbb{R} \setminus]a, b[$ est non vide, F est nulle ou égale à 1 sur cet ensemble. L'ensemble des médianes $M(X)$ est donc réduit à un singleton.

I.2. Soit X une v.a.r. de type 1 et F sa f.d.r..

Montrons que l'ensemble $A = \{m \in \mathbb{Z}; F(m) \geq \frac{1}{2}\}$ admet un plus petit élément. On a : $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ donc il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq x_1$, $F(x) \geq \frac{1}{2}$. L'élément $[x_1] + 1$ appartient à A donc A est non vide. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x_0$, $F(x) \leq \frac{1}{2}$. L'ensemble A est minoré par x_0 . Le sous-ensemble A de $\mathbb{Z}$ non vide et minoré, admet donc un plus petit élément, que l'on note m_0 .

Supposons que l'on ait : $F(m_0) > \frac{1}{2}$; montrons $M(X) = \{m_0\}$.

La f.d.r. F étant constante sur tout intervalle de la forme $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, et m_0 étant le plus petit entier m tel que $F(m) \geq \frac{1}{2}$, on a, d'une part : $\forall x < m_0$, $F(x) \leq F(m_0 - 1) < \frac{1}{2}$ donc x n'est pas médiane, d'autre part : $\forall x > m_0$, $\lim_{t \rightarrow x-} F(t) \geq F(m_0) > \frac{1}{2}$ donc x n'est pas médiane. Enfin m_0 est médiane car $\lim_{x \rightarrow m_0-} F(x) = F(m_0 - 1) < \frac{1}{2}$ et $F(m_0) > \frac{1}{2}$.

Supposons que l'on ait : $F(m_0) = \frac{1}{2}$; montrons qu'il existe un entier strictement positif n tel que $F^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = [m_0, m_0 + n[$ et $M(X) = [m_0, m_0 + n]$.

Si $F(m_0) = \frac{1}{2}$, alors le sous-ensemble $B = \{m \in \mathbb{Z}; F(m) = \frac{1}{2}\}$ de $\mathbb{Z}$ est non vide (car contenant m_0) et, en utilisant le même argument que précédemment, borné. Il admet donc un plus petit élément qui n'est autre que m_0 (car $B \subset A$ et que le plus petit élément de A appartient à B) et comme plus grand élément un élément que l'on peut écrire $m_0 + n - 1$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). La f.d.r. F étant constante sur tout intervalle de la forme $[k, k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$, on a donc : $F^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = [m_0, m_0 + n[$.

Tout élément de $]m_0, m_0 + n[$ est médiane car F est continue et égale à $\frac{1}{2}$ sur cet intervalle;

m_0 est médiane car $\lim_{x \rightarrow (m_0)-} F(x) = F(m_0 - 1) < \frac{1}{2}$ et $F(m_0) = \frac{1}{2}$.

$m_0 + n$ est aussi médiane car $\lim_{x \rightarrow (m_0+n)-} F(x) = F(m_0) = \frac{1}{2}$ et $F(m_0 + n) > \frac{1}{2}$.

Soit $x > m_0 + n$, alors $\lim_{t \rightarrow x-} F(t) \geq F(m_0 + n) > \frac{1}{2}$ donc x n'est pas médiane.

Soit $x < m_0$, alors $F(x) < \frac{1}{2}$ donc x n'est pas médiane.

L'ensemble des médianes est $M(X) = [m_0, m_0 + n]$.

I.3.a. X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (avec $p \in]0, 1[$). Alors $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = 1 - p$ si $x \in [0, 1[$, $F(x) = 1$ si $x \geq 1$. On en déduit : $M(X) = \{1\}$ si $p > \frac{1}{2}$, $M(X) = \{0\}$ si $p < \frac{1}{2}$, $M(X) = [0, 1]$ si $p = \frac{1}{2}$.

I.3.b. X suit la loi binomiale $B(n, 1/2)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). On a alors :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k \mathbb{I}_{[k, k+1[}(x) + \mathbb{I}_{[n, \infty[}(x)$ avec $P_k = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \frac{1}{2^n}$.

Deux cas se présentent suivant la parité de n .

Si n est pair : $n = 2r$, avec $r \in \mathbb{N}^*$ alors, en utilisant l'égalité $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, pour $i = 0, \dots, r$:

$$F(r) = \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \frac{1}{2^n} = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} (\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \frac{1}{2^n} + \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2} (1 + \frac{\binom{n}{r}}{2^n}).$$

On a donc : $F(r) > \frac{1}{2}$ et $F(r-1) = F(r) - \frac{\binom{n}{r}}{2^n} = \frac{1}{2} (1 - \frac{\binom{n}{r}}{2^n}) < \frac{1}{2}$.
L'entier r est le plus petit entier vérifiant $F(r) > \frac{1}{2}$, il s'agit de l'unique médiane de X d'après I.2.

Si n est impair : $n = 2r + 1$, avec $r \in \mathbb{N}$, un calcul similaire au précédent montre que l'on a $F(r) = \frac{1}{2}$ et $F(r+1) > \frac{1}{2}$. On déduit de I.2. que l'ensemble des médianes est alors $[r, r+1]$.

En conclusion : $M(X) = \{\frac{n}{2}\}$ si n est pair, $[\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}]$ si n est impair.

I.3.c. X suit la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$. Il s'agit d'une v.a.r. de type 2. L'unique médiane est le réel m vérifiant $F(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^m e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, 0.

I.3.d. X suit la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$). Il s'agit d'une variable de type 2. L'unique médiane est le réel m vérifiant $F(m) = \int_0^m \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, $1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, $\frac{\ln 2}{\lambda}$.

I.4. Si $a = 0$, alors $aX = 0$ de loi de probabilité la mesure de Dirac en 0. Il est aisé de vérifier que l'unique médiane est alors 0. Il s'agit de l'unique élément de l'ensemble $\{0m; m \in M(X)\}$.

Si $a \neq 0$, que a soit strictement positif ou strictement négatif, on a la suite d'équivalences :
 $m' \in M(aX) \Leftrightarrow P(aX < m') \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \leq m') \Leftrightarrow P(X < \frac{m'}{a}) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq \frac{m'}{a}) \Leftrightarrow \frac{m'}{a} \in M(X) \Leftrightarrow \exists m \in M(X) m' = am \Leftrightarrow m' \in \{am; m \in M(X)\}$

Pour tout a de $\mathbb{R}$, on a :
 $m' \in M(a+X) \Leftrightarrow P(a+X < m') \leq \frac{1}{2} \leq P(a+X \leq m') \Leftrightarrow P(X < m' - a) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m' - a) \Leftrightarrow m' - a \in M(X) \Leftrightarrow \exists m \in M(X) m' = a + m \Leftrightarrow m' \in \{a + m; m \in M(X)\}$

I.5. Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Alors $X + Y$ est une v.a.r. de loi binomiale $B(2, \frac{1}{2})$, et d'après la question I.3. on a : $M(X) = M(Y) = [0, 1]$ et $M(X + Y) = \{1\}$.
L'ensemble des médianes de $X + Y$ n'est pas égal à l'ensemble $\{m + m'; m \in M(X), m' \in M(Y)\}$ ($= [0, 2]$).

I.6. Soit X une v.a.r. de loi de Bernoulli de paramètre p avec $p \in]\frac{1}{2}, 1[$. On a alors $E(X) = p$ et $M(X) = \{1\}$ donc $E(X) \notin M(X)$.

I.7. On a : $1 = \mathbb{I}_{[X \geq m]} + \mathbb{I}_{[X < m]}$ donc, par linéarité de l'espérance :
 $\sigma^2(X) = E((X - E(X))^2) = E((X - E(X))^2 \mathbb{I}_{[X \geq m]}) + E((X - E(X))^2 \mathbb{I}_{[X < m]})$.
Le deuxième terme de l'égalité précédente étant positif, on en déduit : $\sigma^2(X) \geq E((X - E(X))^2 \mathbb{I}_{[X \geq m]})$.
On procède de façon analogue pour montrer : $\sigma^2(X) \geq E((X - E(X))^2 \mathbb{I}_{[X \leq m]})$, d'où le résultat.

I.8. Supposons $m \geq E(X)$.
Alors, si $X(\omega) \geq m$, on a $(X(\omega) - E(X))^2 \geq (E(X) - m)^2$ et donc :
 $\sigma^2(X) = E((X - E(X))^2) \geq E((X - E(X))^2 \mathbb{I}_{[X \geq m]}) \geq E((E(X) - m)^2 \mathbb{I}_{[X \geq m]}) = (E(X) - m)^2 P([X \geq m]) \geq \frac{1}{2} (E(X) - m)^2$ puisque, m étant une médiane, on a : $P([X \geq m]) = 1 - P([X < m]) \geq \frac{1}{2}$.
On a montré $\sigma^2(X) \geq \frac{1}{2} (E(X) - m)^2$ et donc le résultat.
On reprend une démonstration similaire dans le cas $m \leq E(X)$.

Partie II

II.A.1. Montrons la propriété par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, on a : $\int_0^\lambda e^{-x} x dx = [-e^{-x} x]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 = 1 - P_1(\lambda)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons l'égalité : $1 - P_n(\lambda) = \frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^{-x} x^n dx$ vérifiée.

On a alors :

$$\frac{1}{(n+1)!} \int_0^\lambda e^{-x} x^{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)!} ([-e^{-x} x^{n+1}]_0^\lambda + \int_0^\lambda (n+1) e^{-x} x^n dx) = \frac{1}{(n+1)!} (-e^{-\lambda} \lambda^{n+1}) + \frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^{-x} x^n dx.$$

Or, ce dernier terme est égal, en utilisant l'hypothèse de récurrence, à $1 - P_n(\lambda)$.

On en déduit : $\frac{1}{(n+1)!} \int_0^\lambda e^{-x} x^{n+1} dx = 1 - P_n(\lambda) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = 1 - P_{n+1}(\lambda)$.

On a donc montré que l'égalité est vérifiée pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

II.A.2. On a, en posant $x = n(1 - u)$:

$$1 - P_n(n) = \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-x} x^n dx = \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-n(1-u)} n^n (1-u)^n n du$$

$$\text{d'où } 1 - P_n(n) = \frac{1}{n!} e^{-n} n^{n+1} \int_0^1 (e^u (1-u))^n du = e^{-n} \frac{n^{n+1}}{n!} I_n.$$

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie par l'intégrale II.A.1. est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la fonction à intégrer est continue sur $[0, \lambda]$) et vérifie : $P_n'(\lambda) = -e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

II.A.3. Pour tout x de $]0, 1[$, Ψ est continue et dérivable comme composée de fonctions continues et dérivables et $\Psi'(x) = \frac{2x-x^2+2(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^3}$. Le dénominateur est strictement positif sur $]0, 1[$.

Notons Ψ_1 l'application sur $]0, 1[$ définissant le numérateur ; Ψ_1 est dérivable sur $]0, 1[$ et $\forall x \in]0, 1[$, $\Psi_1'(x) = -2(x + \ln(1-x)) > 0$.

Donc Ψ_1 est strictement croissante sur $]0, 1[$ et, comme $\lim_{x \rightarrow 0} \Psi_1(x) = 0$, on en déduit que Ψ_1 est strictement positive sur $]0, 1[$ et que Ψ est strictement croissante sur $]0, 1[$. Etant continue et strictement croissante sur $]0, 1[$, Ψ définit une bijection de $]0, 1[$ sur $] \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x), \lim_{x \rightarrow 1} \Psi(x) [$.

Il est aisé de vérifier : $\lim_{x \rightarrow 1} \Psi(x) = +\infty$ et, en utilisant l'équivalent au voisinage de 0 : $-x - \ln(1-x) \sim \frac{x^2}{2}$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) = \frac{1}{2}$.

L'application Ψ définit donc une bijection croissante de $]0, 1[$ sur $]\frac{1}{2}, \infty[$ et, en utilisant le prolongement par continuité en 0, Ψ est une bijection croissante de $[0, 1[$ sur $[\frac{1}{2}, \infty[$.

II.A.4. On vérifie : $\forall x \in]0, 1[$, $e^{-x^2 \Psi(x)} = (1-x)e^x$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a ((1-x)e^x)^n dx = \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a e^{-nx^2 \Psi(x)} dx = \int_0^1 e^{-nx^2 \Psi(x)} dx$.

Comme on a : $\forall x \in]0, 1[$, $\Psi(x) \geq \frac{1}{2}$, on en déduit : $\forall x \in]0, 1[$, $e^{-nx^2 \Psi(x)} \leq e^{-n \frac{x^2}{2}}$, et, la fonction à intégrer étant positive, $I_n \leq \int_0^1 e^{-n \frac{x^2}{2}} dx \leq \int_0^\infty e^{-n \frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (on reconnaît la densité de la loi normale centrée de variance $1/n$).

II.A.5. Soit $\sigma \in]0, 1[$ et $\delta = \Psi^{-1}(\frac{1}{2\sigma^2})$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq \int_0^\delta e^{-nx^2 \Psi(x)} dx$ car la fonction à intégrer est positive. Comme on a : $\forall x \in]0, \delta[$, $\Psi(x) \leq \frac{1}{2\sigma^2}$ on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq \int_0^\delta e^{-n \frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ (en posant $u = \sqrt{n} \frac{x}{\sigma}$), d'où la première inégalité.

Pour tout σ de $]0, 1[$, $\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}$ appartient à $]\sqrt{n}\delta, +\infty[$ et $\int_0^{\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \geq \int_0^{\sqrt{n}\delta} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, d'où la deuxième inégalité.

II.A.6. On déduit des inégalités précédentes :

$$\forall \sigma \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{n}\delta} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n \leq 1.$$

Le premier membre converge vers σ lorsque n tend vers l'infini. On en déduit :

$$\forall \sigma \in]0, 1[, \sigma \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n \leq 1.$$

En faisant tendre σ vers 1, on peut donc conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n$ existe et est égale à 1, d'où la

première équivalence. On en déduit la deuxième :

$$1 - P_n(n) = e^{-n} \frac{n^{n+1}}{n!} I_n \sim e^{-n} \frac{n^{n+1}}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{n^n}{n!} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

II.B.1. Montrons par récurrence sur n , ($n \in \mathbb{N}^*$) que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n . Supposons que la propriété est vraie à l'ordre $n-1$ (avec $n \geq 2$) et montrons la propriété à l'ordre n . Les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes en probabilité et à valeurs dans $\mathbb{N}$, les v.a.r. S_{n-1} (somme de $X_1, \dots, X_{n-1}$) et X_n sont indépendantes en probabilité et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On peut alors écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, [S_n = k] = \bigcup_{\{(i,j) \in \mathbb{N}^2; i+j=k\}} ([S_{n-1} = i] \cap [X_n = j]) = \bigcup_{i=0}^k ([S_{n-1} = i] \cap [X_n = k-i]),$$

réunion finie d'événements deux à deux incompatibles, d'où :

$$P([S_n = k]) = \sum_{i=0}^k P([S_{n-1} = i] \cap [X_n = k-i]) = \sum_{i=0}^k P([S_{n-1} = i])P([X_n = k-i]),$$

en utilisant l'indépendance en probabilité des v.a.r. S_{n-1} et X_n . On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P([S_n = k]) = \sum_{i=0}^k e^{-(n-1)} \frac{(n-1)^i}{i!} e^{-1} \frac{1}{(k-i)!} = e^{-n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n-1)^i = e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

par la formule du Binôme.

On a montré que, si S_{n-1} suit une loi de Poisson de paramètre $(n-1)$, alors S_n suit une loi de Poisson de paramètre n .

En particulier, pour $n=2$, on a montré que si S_1 suit une loi de Poisson de paramètre 1 alors S_2 suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Il suffit donc de vérifier que S_1 suit une loi de Poisson de paramètre 1 pour avoir montré que la propriété est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Comme on a $S_1 = X_1$ et X_1 suit une loi de Poisson de paramètre 1 par hypothèse, la propriété est vraie à l'ordre 1 et la démonstration par récurrence est terminée.

II.B.2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(n) = \sum_{k=0}^n P([S_n = k]) = P([S_n \leq n]) = P([(S_n - n) \leq 0]) = P([\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0]).$$

La v.a.r. $(S_n - n)/\sqrt{n}$ est la v.a.r. de Poisson S_n centrée réduite, mais aussi la moyenne des v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ centrée réduite.

Le théorème de la limite centrée permet d'écrire que la suite $((S_n - n)/\sqrt{n})$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite (c'est-à-dire, $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P([(S_n - n) \leq x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$).

La loi normale centrée réduite ayant 0 comme unique médiane, on en déduit : $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$.

II.B.3. En utilisant les résultats des questions II.A.6 et II.B.2. on a l'équivalent à l'infini : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (on retrouve la formule de Stirling).

II.C.1. En utilisant la définition de P_n et le résultat de la question II.A.2., on vérifie aisément que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, P_n(\lambda) + P'_n(\lambda) = P_{n-1}(\lambda)$.

II.C.2. On applique la formule de Taylor entre $n-1$ et n à la fonction P_n (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$) : $\exists \theta_n \in]0, 1[, P_n(n) = P_n(n-1) + P'_n(n-1) + \frac{1}{2}P''_n(n-1 + \theta_n)$,

soit, en utilisant le résultat précédent :

$$\exists \theta_n \in]0, 1[, P_n(n) = P_{n-1}(n-1) + \frac{1}{2}P''_n(n-1 + \theta_n).$$

On déduit de l'expression de P'_n (II.A.2.) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, P''_n(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{n!} (\lambda - n) > 0 \text{ sur }]n, \infty[.$$

Comme on a : $n - 1 + \theta_n < n$, on en déduit $P_n''(n - 1 + \theta_n) < 0$ et $P_n(n) < P_{n-1}(n - 1)$.
La suite $(P_n(n))$ est strictement décroissante.

II.C.3. On applique la formule de Taylor entre $n - 1$ et n à la fonction P_{n-1} :
 $\exists \theta'_n \in]0, 1[, P_{n-1}(n) = P_{n-1}(n - 1) + P'_{n-1}(n - 1) + \frac{1}{2}P''_{n-1}(n - 1 + \theta'_n)$.
En utilisant le résultat II.C.1. et le fait que, d'après le calcul précédent, P''_{n-1} est positive sur $]n - 1, \infty[$,
on a : $\exists \theta'_n \in]0, 1[, P_{n-1}(n) = P_{n-2}(n - 1) + \frac{1}{2}P''_{n-1}(n - 1 + \theta'_n) > P_{n-2}(n - 1)$.
La suite $(P_{n-1}(n))$ est strictement croissante.

II.C.4. La suite $(P_n(n))$ est strictement décroissante, la suite $(P_{n-1}(n))$ est strictement croissante ;
pour montrer que ces deux suites sont adjacentes, il suffit à présent de montrer : $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(n) - P_{n-1}(n)) = 0$.

On a, en utilisant II.C.1., II.A.2. et II.B.3. : $P_n(n) - P_{n-1}(n) = -P'_n(n) = \frac{e^{-n}n^n}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.
On en déduit le résultat.

II.C.5. La suite $(P_n(n))$ est strictement décroissante et converge vers $\frac{1}{2}$, la suite $(P_{n-1}(n))$ est strictement croissante et les suites $(P_{n-1}(n))$ et $(P_n(n))$ sont adjacentes.

On en déduit que la suite $(P_{n-1}(n))$ converge aussi vers $\frac{1}{2}$ et on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, P_{n-1}(n) < \frac{1}{2} < P_n(n)$.

Or, si X suit une loi de Poisson de paramètre n , ($n \in \mathbb{N}^*$), on a : $P_n(n) = P([X \leq n])$ et $P_{n-1}(n) = P([X \leq n - 1]) = P([X < n])$. On en déduit : $P([X < n]) < \frac{1}{2} < P([X \leq n])$.

La f.d.r. de X est donc strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ sur $] - \infty, n[$ et strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ sur $[n, \infty[$.
On en déduit, en utilisant I.2. : $M(X) = \{n\}$.

Partie III

III.1. On pose $Y = X - E(X)$. Il s'agit évidemment d'une variable centrée et, dans chacun des trois cas, il est aisé de vérifier $V(Y) = V(X) = 1$. En effet, pour a) $V(X) = 1$ par hypothèse, pour b) $E(X) = V(X) = 1$, pour c) $V(\frac{X}{2}) = \frac{1}{4}$ donc $V(X) = 1$.

III.2. Si $k = n$, alors $T_n - T_k = 0$, v.a.r. constante égale à 0, de loi de probabilité la mesure de Dirac en 0. Elle est donc de type 1 et il est aisé de vérifier que 0 est l'unique médiane.

Supposons $k \neq n$. On a alors $T_n - T_k = \sum_{h=k+1}^n X_h - E(\sum_{h=k+1}^n X_h)$.

Cas a. X suit une loi normale centrée réduite, les v.a.r. $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ étant indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) comme X , $\sum_{h=k+1}^n X_h$ suit une loi normale de moyenne 0 et de variance $n - k$.

On en déduit : $T_n - T_k = \sum_{h=k+1}^n X_h = \sqrt{n - k}Z$ avec Z v.a.r. de loi normale centrée réduite.

Il s'agit donc d'une v.a.r. de type 2 et, en utilisant I.3.c. et I.4, on en déduit que 0 est (la seule) médiane de $T_n - T_k$.

Cas b. X suit une loi de Poisson de paramètre 1, les v.a.r. $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ étant i.i.d. comme X , on déduit de II.B.1. que $\sum_{h=k+1}^n X_h$ suit une loi de Poisson de paramètre $n - k$.

Il s'agit donc d'une v.a.r. de type 1, de même que $T_n - T_k = \sum_{h=k+1}^n X_h - (n - k)$. On déduit de II.C.5. $M(\sum_{h=k+1}^n X_h) = \{n - k\}$ et de I.4. $M(T_n - T_k) = \{0\}$.

Cas c. $X/2$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, les v.a.r. $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ étant i.i.d. comme X , on en déduit que $\frac{1}{2} \sum_{h=k+1}^n X_h$ suit une loi binomiale de paramètre $n - k$ et $\frac{1}{2}$, donc d'espérance mathématique $\frac{n - k}{2}$, de variance $\frac{n - k}{4}$, et, en utilisant I.3.b. d'ensemble des médianes $\{\frac{n - k}{2}\}$ si $n - k$ est pair, $[\frac{n - k - 1}{2}, \frac{n - k + 1}{2}]$ si $n - k$ est impair.

La v.a.r. $T_n - T_k = \sum_{h=k+1}^n X_h - (n - k)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$; elle est donc de type 1.

En utilisant successivement les deux propriétés de I.4. on a : $M(\sum_{h=k+1}^n X_h) = \{n - k\}$ si $n - k$ est pair, $[n - k - 1, n - k + 1]$ si $n - k$ est impair, enfin : $M(T_n - T_k) = \{0\}$ si $n - k$ est pair, $[-1, 1]$ si $n - k$ est impair. Dans les deux cas, 0 est médiane.

III.3. Soit (k, k') deux entiers vérifiant $1 \leq k < k' \leq n$. Montrons $\Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset$.

Soit $\omega \in \Omega_k \cap \Omega_{k'}$, ω vérifie $T_k(\omega) \leq \max\{T_j(\omega), j < k'\} \leq x$ car $\omega \in \Omega_{k'}$ et $T_k(\omega) > x$ car $\omega \in \Omega_k$, ce

qui est contradictoire, donc $\Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset$.

Montrons $\cup_{k=1}^n \Omega_k = [\max\{T_j; j \leq n\} > x]$.

Soit $\omega \in \cup_{k=1}^n \Omega_k$, $\exists k \in [1, n]$, $\omega \in \Omega_k$ et $T_k(\omega) > x$ donc $\max\{T_j(\omega); j \leq n\} > x$.

Réciproquement, soit $\omega \in [\max\{T_j; j \leq n\} > x]$, $\exists I \subset [1, n]$, $\forall k \in I$, $T_k(\omega) > x$. Soit k_0 l'élément minimal de I , alors $T_{k_0}(\omega) > x$ et $\forall j \in [1, n]$ $j < k_0$, $T_j(\omega) \leq x$, c'est-à-dire, $\omega \in \Omega_{k_0} \subset \cup_{k=1}^n \Omega_k$.

III.4. (i) Soit $\omega \in [T_n - T_k \geq 0] \cap \Omega_k$, montrons $T_n(\omega) > x$. On a $T_n(\omega) \geq T_k(\omega) > x$ car $\omega \in \Omega_k$ d'où le résultat.

(ii) Soit $\omega \in [T_n > x + \varepsilon] \cap \Omega_k \cap [Y_k < \varepsilon]$, montrons $T_k(\omega) < T_n(\omega)$. Comme on a : $\omega \in \Omega_k$ et $Y_k(\omega) < \varepsilon$, on en déduit $T_{k-1}(\omega) \leq x$ et $T_k(\omega) = T_{k-1}(\omega) + Y_k(\omega) \leq x + \varepsilon$, et comme on a $T_n(\omega) > x + \varepsilon$ on en déduit : $T_k(\omega) < T_n(\omega)$.

III.5. Pour la deuxième inégalité, on a : $[T_n > x] \subset [\max\{T_j; j \leq n\} > x] = \cup_{k=1}^n \Omega_k$ donc $[T_n > x] = \cup_{k=1}^n ([T_n > x] \cap \Omega_k)$ et ces événements sont 2 à 2 incompatibles.

On a donc : $P([T_n > x]) = \sum_{k=1}^n P([T_n > x] \cap \Omega_k)$.

En utilisant (i), on obtient : $P([T_n > x]) \geq \sum_{k=1}^n P([T_n - T_k \geq 0] \cap \Omega_k)$.

Comme Ω_k est fonction des T_j , $j \leq k$, et $T_n - T_k$ est fonction des T_j , $j > k$, ces deux v.a.r. sont indépendantes en probabilité et on peut écrire :

$$P([T_n > x]) \geq \sum_{k=1}^n P([T_n - T_k \geq 0])P(\Omega_k).$$

Enfin, 0 étant médiane de $T_n - T_k$, on a $P([T_n - T_k \geq 0]) = 1 - P([T_n - T_k < 0]) \geq \frac{1}{2}$ et, comme on a :

$$\sum_{k=1}^n P(\Omega_k) = P(\cup_{k=1}^n \Omega_k) = P([\max\{T_j; j \leq n\} > x]),$$

$$\text{on en déduit : } P([T_n > x]) \geq \sum_{k=1}^n P([T_n - T_k \geq 0] \cap \Omega_k) \geq \frac{1}{2} P([\max\{T_j; j \leq n\} > x]).$$

Pour la première inégalité, on a :

$$[T_n > x + \varepsilon] \subset [T_n > x] \subset \cup_{k=1}^n \Omega_k = \cup_{k=1}^n \{\Omega_k \cap ([Y_k < \varepsilon] \cup [Y_k \geq \varepsilon])\}.$$

On a donc : $[T_n > x + \varepsilon] = \cup_{k=1}^n \{[T_n > x + \varepsilon] \cap \Omega_k \cap ([Y_k < \varepsilon]) \cup \cup_{k=1}^n \{[T_n > x + \varepsilon] \cap \Omega_k \cap [Y_k \geq \varepsilon]\}$.

Les événements dont on écrit la réunion sont 2 à 2 incompatibles, d'où :

$$P([T_n > x + \varepsilon]) = \sum_{k=1}^n P([T_n > x + \varepsilon] \cap \Omega_k \cap [Y_k < \varepsilon]) + \sum_{k=1}^n P([T_n > x + \varepsilon] \cap \Omega_k \cap [Y_k \geq \varepsilon]).$$

En utilisant (ii) pour le premier terme et une majoration évidente pour le deuxième, on obtient :

$$P([T_n > x + \varepsilon]) \leq \sum_{k=1}^n P([T_n - T_k > 0] \cap \Omega_k) + \sum_{k=1}^n P([Y_k \geq \varepsilon]).$$

On conclut comme précédemment : 0 étant médiane de $T_n - T_k$, on a :

$$P([T_n - T_k > 0]) = 1 - P([T_n - T_k \leq 0]) \leq \frac{1}{2},$$

les événements $[T_n - T_k > 0]$ et Ω_k sont indépendants et on a :

$$\sum_{k=1}^n P(\Omega_k) = P(\cup_{k=1}^n \Omega_k) = P([\max\{T_j; j \leq n\} > x]),$$

$$\text{d'où le résultat : } P([T_n > x + \varepsilon]) \leq \frac{1}{2} P([\max\{T_j; j \leq n\} > x]) + \sum_{k=1}^n P([Y_k \geq \varepsilon])$$

III.6. Dans chacun des 3 cas envisagés, Y admet un moment d'ordre 4. On peut donc appliquer l'inégalité de Markov à Y^4 .

$$\text{Soit } \theta \in \mathbb{R}_+^*. \text{ On a : } \forall j \leq n, P([Y_j \geq \theta\sqrt{n}]) \leq P(|Y_j| \geq \theta\sqrt{n}) = P([Y_j^4 \geq \theta^4 n^2]) \leq \frac{E(Y_j^4)}{\theta^4 n^2}.$$

$$\text{On a alors : } 0 \leq \sum_{j=1}^n P([Y_j \geq \theta\sqrt{n}]) \leq \frac{E(Y^4)}{\theta^4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{E(Y^4)}{\theta^4} \frac{1}{n}.$$

Le dernier membre est le terme général d'une suite convergeant vers 0.

On en déduit que la suite $(\sum_{j=1}^n P([Y_j \geq \theta\sqrt{n}]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

III.7. Appliquons la double inégalité du III.5. à $x = \lambda\sqrt{n}$ et $\varepsilon = \theta\sqrt{n}$:

$$P([T_n > \lambda\sqrt{n} + \theta\sqrt{n}]) - \sum_{k=1}^n P([Y_k \geq \theta\sqrt{n}]) \leq \frac{1}{2} P([\max\{T_j; j \leq n\} > \lambda\sqrt{n}]) \leq P([T_n > \lambda\sqrt{n}]).$$

Les v.a.r. $(Y)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont i.i.d. et centrées réduites, et on a $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ (donc T_n est centrée et de variance n) ; on en déduit, par le théorème de la limite centrale, que la suite de v.a.r. centrées réduites $(\frac{T_n}{\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. normale centrée réduite.

Si on note F_n la f.d.r. de $\frac{T_n}{\sqrt{n}}$ et F la f.d.r. de la loi normale centrée réduite, on a : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = F(y)$ et donc aussi, si on pose $S_n = 1 - F_n$ et $S = 1 - F$: $\forall y \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(y) = S(y)$.

Le premier membre de la double inégalité converge donc (en utilisant III.6.) vers $S(\lambda + \theta)$ et le dernier membre de la double inégalité vers $S(\lambda)$. On en déduit, en posant : $H_n(\lambda) = \frac{1}{2} P([\max\{T_j; j \leq n\} > \lambda\sqrt{n}])$:

$$\forall (\lambda, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, S(\lambda + \theta) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} H_n(\lambda) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} H_n(\lambda) \leq S(\lambda).$$

En faisant tendre θ vers 0, l'application S étant continue, on peut conclure que la suite de t.g. $\frac{1}{2}P([\max\{T_j; j \leq n\} > \lambda\sqrt{n}])$ est convergente de limite $S(\lambda)$ d'où le résultat.

III.8. On remarque que, pour $\lambda = 0$, la limite est égale à 1. On en déduit que, si $\lambda \leq 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} P([\max\{T_j; j \leq n\} > \lambda\sqrt{n}]) = 1$.