

# Marches aléatoires - Binôme généralisé - Correction

## I. Binôme généralisé

Notons tout d'abord que, dans le cas où  $\alpha$  appartient à  $\mathbb{N}$ ,  $\binom{\alpha}{n}$  n'est autre que le coefficient binomial classique.

1) On a :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n+1} + \binom{\alpha}{n} &= \frac{1}{(n+1)!}[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)] + \frac{1}{n!}[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)] \\ &= \frac{1}{(n+1)!}[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)][(\alpha-n) + (n+1)] \\ &= \frac{1}{(n+1)!}[(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)] \\ &= \binom{\alpha+1}{n+1} \end{aligned}$$

et, pour  $n = 0$ , l'égalité est encore vérifiée.

2) 1er cas :  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$

Il s'agit alors de la formule de Vandermonde, connue sur  $\mathbb{N}^2$ . Pour la démontrer, pour  $n \in \mathbb{N}$  considérons les deux polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  :

$$\begin{aligned} (X+1)^{\alpha+\beta} &= \sum_{n=0}^{\alpha+\beta} \binom{\alpha+\beta}{n} X^n \quad \text{et} \\ (X+1)^\alpha (X+1)^\beta &= \left[ \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} X^k \right] \left[ \sum_{j=0}^{\beta} \binom{\beta}{j} X^j \right] = \sum_{n=0}^{\alpha+\beta} \left( \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} \right) X^n. \end{aligned}$$

Le polynôme :  $(X+1)^{\alpha+\beta} - (X+1)^\alpha (X+1)^\beta$  étant le polynôme nul, ses coefficients sont nuls, ce qui, avec les conventions habituelles sur les coefficients binomiaux ( $\binom{\alpha}{k} = 0$  pour  $k > \alpha$ ), conduit à la formule de Vandermonde pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ .

2ème cas :  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; considérons le polynôme :

$$P_\beta(X) = \binom{X+\beta}{n} - \sum_{k=0}^n \binom{X}{k} \binom{\beta}{n-k}$$

Il s'agit d'un polynôme de  $\mathbb{R}(X)$ , de degré inférieur ou égal à  $n$  qui s'annule, d'après le cas précédent, en tout point de  $\mathbb{N}$ . C'est donc le polynôme nul et on en déduit :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad \binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k}.$$

3ème cas :  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Pour des raisons de symétrie, la formule de Vandermonde est aussi vérifiée pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ . Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Considérons de nouveau le polynôme :

$$P_\beta(X) = \binom{X+\beta}{n} - \sum_{k=0}^n \binom{X}{k} \binom{\beta}{n-k}$$

Il s'annule en tout point de  $\mathbb{N}$  d'après le deuxième cas appliqué à  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ . Il s'agit du polynôme nul et la formule de Vandermonde est donc démontrée dans le cas général.

3) a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - (k-1)\right) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2^k} = \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \frac{(2k)!}{2^k k!} = (-1)^k \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \text{ et}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - (k-1)\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{1.3 \dots (2k-3)}{2^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k! (2k-1)} \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$$

Ces égalités sont encore vérifiées pour  $k = 0$ . On a donc montré :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \text{ et } \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On peut écrire, en utilisant 3) a) :

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2k} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^{n-k} 2^{2n-2k} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = (-1)^n 2^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k}$$

soit, en utilisant la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = (-1)^n 2^{2n} \binom{-1}{n} = (-1)^n 2^{2n} \frac{(-1)(-2) \dots (-n)}{n!} = 2^{2n}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 2^{2n}$$

4) a) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u \in [0, 1[$ , la fonction  $f_u : t \rightarrow (1+ut)^\alpha$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ . On peut lui appliquer la formule de Taylor en 1 à un ordre quelconque.

Comme on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f_u^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) u^k (1+ut)^{\alpha-k} = \binom{\alpha}{k} k! u^k (1+ut)^{\alpha-k},$$

on en déduit

$$f_u^{(k)}(0) = \binom{\alpha}{k} k! u^k, \text{ et } f_u^{(n+1)}(t) = \binom{\alpha}{n+1} (n+1)! u^{n+1} (1+ut)^{\alpha-n-1}.$$

On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_u(1) = (1+u)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} u^k + v_n \text{ avec}$$

$$v_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f_u^{(n+1)}(t) dt = (n+1) \binom{\alpha}{n+1} u^{n+1} \int_0^1 (1+ut)^{\alpha-n-1} (1-t)^n dt.$$

Montrons  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ . On aura alors montré :

$$(1+u)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k.$$

Pour  $n$  suffisamment grand on a  $\alpha - n + 1 < 0$  et comme  $u$  appartient à  $[0, 1[$  et  $t$  à  $[0, 1]$ , on a  $1+ut \geq 1$  et  $0 < (1+ut)^{\alpha-n+1} \leq 1$ , ce qui permet de majorer  $|v_n|$  :

$$|v_n| \leq (n+1) u^{n+1} \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| \int_0^1 (1-t)^n dt \leq (n+1) u^{n+1} \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| := s_n.$$

Si  $\alpha$  est entier positif, alors, pour  $n$  suffisamment grand,  $s_n$  est nul et  $v_n$  aussi. Sinon, on a :

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{n+2} u \frac{\left| \binom{\alpha}{n+2} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|} = u \frac{|\alpha - n - 1|}{n+1}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = u < 1.$$

La règle de d'Alembert permet de conclure que la série de terme général  $s_n$  est convergente et donc la suite  $(s_n)$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il en est donc de même de  $v_n$  et le résultat est prouvé.

b) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u \in [0, 1[$ ; la fonction  $g_u : t \rightarrow (1 - ut)^\alpha$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ . On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, g_u^{(k)}(t) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)(-u)^k (1 - ut)^{\alpha - k} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} k! u^k (1 - ut)^{\alpha - k}, \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_u(1) = (1 - u)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} (-u)^k + r_n, \text{ avec}$$

$$r_n = (-1)^{n+1} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} u^{n+1} \int_0^1 (1 - ut)^{\alpha - n - 1} (1 - t)^n dt.$$

Montrons  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ . Pour  $n$  suffisamment grand on a  $\alpha - n + 1 < 0$  et comme  $u$  appartient à  $[0, 1[$  et  $t$  à  $[0, 1]$ , on a

$$1 - ut \geq 1 - t \text{ et } (1 - t)^n (1 - ut)^{\alpha - n - 1} \leq (1 - t)^n (1 - ut)^{\alpha - 1} (1 - t)^{-n} = (1 - ut)^{\alpha - 1},$$

ce qui permet de majorer  $|r_n|$  :

$$|r_n| \leq (n+1) u^{n+1} \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| \int_0^1 (1 - ut)^{\alpha - 1} dt = s_n \int_0^1 (1 - ut)^{\alpha - 1} dt = s_n \frac{1 - (1 - u)^\alpha}{u\alpha}.$$

On conclut comme précédemment. Si  $\alpha$  est entier positif, alors, pour  $n$  suffisamment grand,  $s_n$  est nul et  $v_n$  aussi. Sinon, on a vu que la suite  $(s_n)$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il en est donc de même de  $r_n$  et on peut en conclure que l'on a, pour tout  $u$  de  $] -1, 0]$  et donc de  $] -1, 1[$ ,

$$(1 + u)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k.$$

c) Soit  $u \in ] -1, 1[$ , on a alors  $-u \in ] -1, 1[$  et d'après le résultat précédent :

$$\frac{1}{(1 - u)^{r+1}} = (1 - u)^{-r-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r-1}{k} (-u)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-r-1}{k} u^k.$$

On a :  $\binom{-r-1}{k} = \frac{(-r-1)(-r-2)\dots(-r-k)}{k!} = (-1)^k \binom{r+k}{r}$  d'où :

$$\forall u \in ] -1, 1[, \frac{1}{(1 - u)^{r+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k}{r} u^k = \sum_{j=r}^{\infty} \binom{j}{r} u^{j-r}.$$

Pour  $x \in ] -1, 1[$ , on a  $x^2 \in [0, 1[$  et, par 4)a) ou 4)b), on a :

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k},$$

ce que l'on peut écrire, en utilisant le 3)a)

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k}}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k.$$

De même, pour  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} x^{2k} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k}}{2^{2k}} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k.$$

## II. Première marche aléatoire

1) Soit  $S_i$  la v.a. prenant la valeur  $+1$  avec la probabilité  $p$  et la valeur  $-1$  avec la probabilité  $q = 1 - p$ . On a alors  $X_n = \sum_{i=1}^n S_i$ .  
On pose :  $R_i = \frac{S_i+1}{2}$  ;  $R_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .  
Les v.a.r.  $(S_i)_{i=1,\dots,n}$  étant indépendantes en probabilité, il en est de même des v.a.r.  $(R_i)_{i=1,\dots,n}$ .  
On pose :  $Y_n = \sum_{i=1}^n R_i$  ;  $Y_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  et, comme on a  $X_n = 2Y_n - n$ , on en déduit :

$$X_n(\Omega) = \{2i - n; i \in [0, n]\} \text{ et } \forall k \in X_n(\Omega), n+k \text{ est pair et}$$

$$P(X_n = k) = P(Y_n = \frac{n+k}{2}) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

et

$$E(X_n) = 2E(Y_n) - n = 2np - n = n(p - q) \text{ et } V(X_n) = 4V(Y_n) = 4npq.$$

On a pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $a_n = P(X_n = 0)$  et donc  $a_{2n-1} = 0$  et  $a_{2n} = \binom{2n}{n} (pq)^n$ .

2) a) Puisque l'on a :  $p = \frac{1}{2}$ , on en déduit :  $a_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$ .  
D'après la question 3)b) de la partie précédente, on a :  $\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 2^{2n}$  et, par conséquent :

$$\sum_{k=0}^n a_{2k} a_{2n-2k} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 1$$

b) On a :  $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ , soit, à l'aide de la formule de Stirling :

$$a_{2n} \sim \frac{1}{2^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{[\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n]^2} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3) Il ne reste de la série que les termes d'indice pair. La série de terme général  $u_k = a_{2k} x^{2k}$  converge pour  $x \in [0, 1[$ . En effet, on peut écrire, pour  $x$  strictement positif :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} x^2 = x^2 pq \frac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}} = x^2 pq \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}$$

donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 4pqx^2$ .

Or, pour  $p \in [0, 1]$  on a  $4pq \leq 1$ , si  $x$  appartient à  $]0, 1[$ , on a donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$ , ce qui assure la convergence de la série (règle de d'Alembert). On a :

$$\forall x \in [0, 1[, A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k q^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{4pqx^2}{4}\right)^k.$$

En utilisant I. 3) c) on en déduit :

$$\forall x \in [0, 1[, A(x) = (1 - 4pqx^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

4) a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dire que la puce est à l'origine à l'instant  $2n$  entraîne qu'elle est repassée par l'origine pour la première fois à l'un des instants  $2, 4, \dots, 2n$ . On a donc :  $[X_{2n} = 0] \subset \cup_{k=1}^n T_{2k}$  et  $[X_{2n} = 0] = \cup_{k=1}^n ([X_{2n} = 0] \cap T_{2k})$ , réunion d'événements deux à deux incompatibles, d'où :  $a_{2n} = P([X_{2n} = 0]) = \sum_{k=1}^n P(T_{2k})P([X_{2n} = 0]/T_{2k})$ . Mais on a :  $P([X_{2n} = 0]/T_{2k}) = P([X_{2n-2k} = 0])$  car le déplacement de la puce est un processus sans mémoire, le nombre et le sens des déplacements réalisés entre les instants  $2k$  et  $2n$ ,  $n > k$ , ne dépendent pas du nombre et du sens des déplacements réalisés avant l'instant  $2k$  ; étant à l'origine à l'instant  $2k$  on a bien le résultat annoncé.

On en déduit :  $a_{2n} = \sum_{k=1}^n t_{2k}a_{2n-2k} = \sum_{k=0}^n t_{2k}a_{2n-2k}$  (car on a posé  $t_0 = 0$ ).

b) Soit  $x \in [0, 1]$ , la série de terme général  $t_k x^k$  (où ne subsiste en fait que les termes d'indice pair) est convergente puisqu'elle est à termes positifs et majorée par la série de terme général  $t_k$ , convergente de somme inférieure ou égale à 1. En effet,  $\sum_{k=0}^{\infty} t_k$  est la probabilité que la puce repasse par l'origine.

Pour  $x \in [0, 1]$ , on peut écrire :  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$  et  $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{2k} x^{2k}$ . La série produit de Cauchy de ces deux séries convergentes est alors convergente :

$$\forall x \in [0, 1[, A(x)T(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} x^{2j}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} t_{2k} x^{2k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2j} t_{2k} x^{2j+2k}.$$

On pose  $2j + 2k = 2n$  et on réordonne les termes :

$$A(x)T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{2n-2k} t_{2k}\right) x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{2n-2k} t_{2k}\right) x^{2n}$$

puisque, pour  $n = 0$ , on a  $t_0 = 0$ . En utilisant 4) a) on en déduit :

$$\forall x \in [0, 1[, A(x)T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = A(x) - 1.$$

c) On peut écrire, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $T(x) = \frac{A(x)-1}{A(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ . Cette égalité est encore vérifiée pour  $x = 1$  puisque, la série définissant  $T(x)$  étant convergente pour  $x = 1$ , la fonction  $T$  est continue en 1.

Il suffit alors de développer  $T(x)$  en utilisant la formule du binôme généralisé, ce qui donne :

$$T(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4pqx^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} p^k q^k x^{2k}.$$

En admettant l'unicité d'un tel développement en série, on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, t_{2k} = \frac{p^k q^k}{2k-1} \binom{2k}{k}.$$

d) On a, en notant  $T$  l'événement "la puce repasse par l'origine" :

$$P(T) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k} = T(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq} = 1 - \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} = 1 - \sqrt{(p-q)^2}$$

soit  $P(T) = 1 - |p - q|$ . Cette probabilité vaut 1 si, et seulement si,  $p = q = \frac{1}{2}$ . La puce repasse presque sûrement par l'origine si, et seulement si,  $p = q = \frac{1}{2}$ .

### III. Deuxième marche aléatoire

Notons  $U_n, V_n, W_n$  les v.a.r. égales respectivement aux nombres de sauts sur la droite, sur la gauche et "sur place".

On a de façon évidente :  $U_n + V_n + W_n = n$  et  $X_n = U_n - V_n$ . Les trois v.a.r.  $U_n, V_n, W_n$ , ne sont pas indépendantes entre elles mais chacune d'elles est la somme de  $n$  v.a.r. de Bernoulli indépendantes de paramètres  $p, q, r$  respectivement. Les lois de probabilité de  $U_n, V_n$  et  $W_n$  sont donc des lois binomiales de paramètres  $(n, p), (n, q)$  et  $(n, r)$  respectivement.

On en déduit :  $E(X_n) = E(U_n) - E(V_n) = np - nq = n(p - q)$  et  $V(X_n) = V(U_n) + V(V_n) - 2\text{cov}(U_n, V_n) = np(1 - p) + nq(1 - q) - 2\text{cov}(U_n, V_n)$ .

Il reste à calculer  $\text{cov}(U_n, V_n)$ . Comme on a :  $U_n + V_n = n - W_n$ , on en déduit :  $V(U_n + V_n) = V(n - W_n) = V(W_n) = nr(1 - r)$  mais on a aussi :

$V(U_n + V_n) = V(U_n) + V(V_n) + 2\text{cov}(U_n, V_n) = np(1 - p) + nq(1 - q) + 2\text{cov}(U_n, V_n)$  d'où :  $2\text{cov}(U_n, V_n) = nr(1 - r) - np(1 - p) - nq(1 - q)$  et  $V(X_n) = 2np(1 - p) + 2nq(1 - q) - nr(1 - r) = n(4pq + r(1 - r))$ .

On a montré :  $E(X_n) = n(p - q)$  et  $V(X_n) = n(4pq + r(1 - r))$ .

### IV. Troisième marche aléatoire

1) On a de façon évidente  $X_{n+1} = X_n + \cos \theta_{n+1}$  et  $Y_{n+1} = Y_n + \sin \theta_{n+1}$  et donc, par récurrence finie :  $X_n = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i$  et  $Y_n = \sum_{i=1}^n \sin \theta_i$ .

2) On a pour tout  $i \in 1, \dots, n$  :  
 $E(\cos \theta_i) = \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{d\theta}{2\pi} = 0$ ,  $E(\sin \theta_i) = \int_0^{2\pi} \sin \theta \frac{d\theta}{2\pi} = 0$ ,  
 $E(\cos^2 \theta_i) = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{4\pi} d\theta = \frac{1}{2}$ ,  
 $E(\sin^2 \theta_i) = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{4\pi} d\theta = \frac{1}{2}$ , soit :

$$E(\cos \theta_i) = E(\sin \theta_i) = 0, V(\cos \theta_i) = V(\sin \theta_i) = \frac{1}{2}.$$

Les v.a.r.  $(\theta_i)_{i=1, \dots, n}$  étant indépendantes en probabilités, il en est de même des v.a.r.  $(\cos \theta_i)_{i=1, \dots, n}$  et des v.a.r.  $(\sin \theta_i)_{i=1, \dots, n}$ . On a alors :  
 $E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(\cos \theta_i) = 0$ ,  $V(X_n) = \sum_{i=1}^n V(\cos \theta_i) = \frac{n}{2}$ ,  
 $E(Y_n) = \sum_{i=1}^n E(\sin \theta_i) = 0$ ,  $V(Y_n) = \sum_{i=1}^n V(\sin \theta_i) = \frac{n}{2}$ , soit :

$$E(X_n) = E(Y_n) = 0, V(X_n) = V(Y_n) = \frac{n}{2}$$

3) Par bilinéarité de la covariance, on a :

$$\text{cov}(X_n, Y_n) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \cos \theta_i, \sum_{i=1}^n \sin \theta_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(\cos \theta_i, \sin \theta_j).$$

Dans le cas  $i \neq j$ ,  $\theta_i$  et  $\theta_j$  sont des v.a.r. indépendantes, il en est donc de même de  $\cos \theta_i$  et  $\sin \theta_j$ , d'où  $\text{cov}(\cos \theta_i, \sin \theta_j) = 0$ . On peut donc écrire :

$$\text{cov}(X_n, Y_n) = \sum_{i=1}^n \text{cov}(\cos \theta_i, \sin \theta_i) = \sum_{i=1}^n E(\cos \theta_i \sin \theta_i)$$

puisque les variables sont centrées.

On a :

$$E(\cos \theta_i \sin \theta_i) = \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{4\pi} d\theta = 0.$$

On en déduit :  $\text{cov}(X_n, Y_n) = 0$ , les v.a.r.  $X_n$  et  $Y_n$  sont non corrélées.

4) On peut écrire :

$$\text{cov}(X_n^2, Y_n^2) = E(X_n^2 Y_n^2) - E(X_n^2)E(Y_n^2) = E(X_n^2 Y_n^2) - \frac{n^2}{4}.$$

Il reste donc à calculer :  $E(X_n^2 Y_n^2)$ .

Pour cela, notons que pour  $n > 1$  on a :  $X_n = X_{n-1} + \cos \theta_n$  et  $Y_n = Y_{n-1} + \sin \theta_n$  d'où

$$\begin{aligned} X_n^2 Y_n^2 &= X_{n-1}^2 Y_{n-1}^2 + X_{n-1}^2 \sin^2 \theta_n + Y_{n-1}^2 \cos^2 \theta_n + 2X_{n-1}^2 Y_{n-1} \sin \theta_n + 2X_{n-1} Y_{n-1}^2 \cos \theta_n \\ &\quad + 2X_{n-1} \cos \theta_n \sin^2 \theta_n + 2Y_{n-1} \cos^2 \theta_n \sin \theta_n + 4X_{n-1} Y_{n-1} \cos \theta_n \sin \theta_n + \cos^2 \theta_n \sin^2 \theta_n. \end{aligned}$$

L'espérance étant linéaire, calculons l'espérance de chaque terme.

On a :  $E(X_{n-1}^2 \sin^2 \theta_n) = E(X_{n-1}^2)E(\sin^2 \theta_n) = \frac{n-1}{2} \frac{1}{2}$  car les v.a.r.  $X_{n-1}^2$  et  $\sin^2 \theta_n$  sont indépendantes en probabilités.

On a de même  $E(Y_{n-1}^2 \cos^2 \theta_n) = \frac{n-1}{2} \frac{1}{2}$ .

On a  $E(2X_{n-1}^2 Y_{n-1} \sin \theta_n) = E(2X_{n-1}^2 Y_{n-1})E(\sin \theta_n) = 0$  car les variables  $2X_{n-1}^2 Y_{n-1}$  et  $\sin \theta_n$  sont indépendantes et la seconde est centrée.

On a de même  $E(2X_{n-1} Y_{n-1}^2 \cos \theta_n) = 0$ .

On a  $E(2X_{n-1} \cos \theta_n \sin^2 \theta_n) = E(2X_{n-1})E(\cos \theta_n \sin^2 \theta_n) = 0$  car les v.a.r.  $2X_{n-1}$  et  $\cos \theta_n \sin^2 \theta_n$  sont indépendantes et la première est centrée.

On a de même  $E(2Y_{n-1} \cos^2 \theta_n \sin \theta_n) = 0$ .

On a :  $E(4X_{n-1} Y_{n-1} \cos \theta_n \sin \theta_n) = E(4X_{n-1} Y_{n-1})E(\cos \theta_n \sin \theta_n) = 0$  car les v.a.r.  $4X_{n-1} Y_{n-1}$  et  $\cos \theta_n \sin \theta_n$  sont indépendantes en probabilité et la deuxième est centrée (calcul fait à la question 3).

Enfin :

$$E(\cos^2 \theta_n \sin^2 \theta_n) = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin 2\theta)^2}{8\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{16\pi} d\theta = \frac{1}{8}.$$

On en déduit :

$$E(X_n^2 Y_n^2) = E(X_{n-1}^2 Y_{n-1}^2) + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{8},$$

c'est-à-dire, en posant :  $\alpha_n = E(X_n^2 Y_n^2)$ ,  $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{4n-3}{8}$ .

Par récurrence finie, on obtient :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{8} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k - \frac{3n}{8} = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3n}{8}, \text{ et donc :}$$

$$\text{cov}(X_n^2, Y_n^2) = E(X_n^2 Y_n^2) - \frac{n^2}{4} = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3n}{8} - \frac{n^2}{4} = -\frac{n}{8}.$$

Les variables  $X_n^2$  et  $Y_n^2$  sont corrélées (pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ) alors que l'on a vu à la question précédente que les variables  $X_n$  et  $Y_n$  sont non corrélées. On en déduit que, bien que non corrélées, les variables  $X_n$  et  $Y_n$  ne sont pas indépendantes en probabilité. En effet, si elles l'étaient, il en serait de même de leur carré et la covariance de  $X_n^2$  et  $Y_n^2$  serait nulle.

5) Le carré de la distance à l'origine de la puce à l'issue du  $n^{\text{ème}}$  saut  $D_n^2$  n'est autre que  $X_n^2 + Y_n^2$ . On en déduit :  $E(D_n^2) = E(X_n^2) + E(Y_n^2) = n$ . Après  $n$  sauts, la puce est à une distance moyenne de l'origine de  $\sqrt{n}$ .