Préparation au Capes de Mathématiques

Marches aléatoires - Binôme généralisé

Les quatre parties sont indépendantes

I. Binôme généralisé

On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$ et on convient de noter $\binom{\alpha}{0} = 1$.

1) Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \binom{\alpha+1}{n+1} = \binom{\alpha}{n+1} + \binom{\alpha}{n}$ (formule de Pascal).

2) Montrer : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$ (formule de Vandermonde).
(Indication : on étudiera successivement les cas $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Dans le premier cas, on utilisera la démonstration à l'aide des polynômes et on reprendra cette idée dans les cas suivants.)

3) a) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$ et $\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 2^{2n}$.

4) On rappelle que si f est une application réelle de classe C^{n+1} ($n \in \mathbb{N}$) sur un intervalle $[0, a]$ ($a \in \mathbb{R}_*^+$), la formule de Taylor à l'origine avec reste intégral permet d'écrire :

$$\forall x \in [0, a], f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

a) Montrer, en utilisant la fonction $f_u : t \to (1 + ut)^\alpha$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in [0, 1[, (1+u)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k$$

(formule du binôme généralisé).
(Indication : on majorera le reste intégral par $s_n := (n+1)u^{n+1}|\binom{\alpha}{n+1}|$ et on montrera que la série de terme général s_n est convergente.)
b) Montrer que la formule précédente est valable pour tout u de $]-1, 1[$.
c) Montrer en utilisant les résultats précédents :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall u \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-u)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} u^{k-r} \text{ et}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (\frac{x^2}{4})^k \text{ et } (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} (\frac{x^2}{4})^k$$

.

II. Première marche aléatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. La première marche se déroule sur l'axe des abscisses (supposé horizontal, les abscisses positives sur la droite, négatives sur la gauche).

Une puce part de l'origine et effectue un saut toutes les secondes, soit d'une unité vers la droite avec la probabilité p, soit d'une unité vers la gauche avec la probabilité q ($q = 1 - p$). Les différents sauts sont supposés indépendants les uns des autres.

On note X_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire égale à l'abscisse du point où se trouve la puce après n sauts, a_n la probabilité que la puce soit à l'origine après n sauts (on convient de poser $a_0 = 1$), T_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement "la puce revient à l'origine pour la première fois à l'issue du $k^{ème}$ saut", t_k la probabilité de T_k (on convient de poser $t_0 = 0$).
1) Préciser la loi de X_n, son espérance mathématique et sa variance. Calculer a_n.
(Indication : on pensera à introduire un schéma de Bernoulli et à écrire X_n en fonction d'une v.a.r. Y_n de loi binomiale de paramètres n et p.)
2) Dans cette question 2 seulement, on suppose $p = \frac{1}{2}$.
a) Montrer, à l'aide des résultats du I, 3) b) : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a_{2k}a_{2n-2k} = 1$.
b) A l'aide de la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$), donner un équivalent au voisinage de l'infini de a_{2n}.
3) Revenant au cas général, on pose, sous réserve de convergence de la série, $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($x \in \mathbb{R}$).
Montrer, en utilisant la formule du binôme généralisé : $\forall x \in [0, 1[, A(x) = (1 - 4pqx^2)^{-\frac{1}{2}}$.
4) Toujours sous réserve de convergence de la série, on pose : $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k x^k$ ($x \in \mathbb{R}$).
a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{2n} = \sum_{k=0}^{n} t_{2k}a_{2n-2k}$.
(Indication : on utilisera, après l'avoir justifiée, l'inclusion $[X_{2n} = 0] \subset \cup_{k=1}^{n} T_{2k}$).
b) En déduire : $\forall x \in [0, 1[, A(x) - 1 = A(x)T(x)$.
(Indication : on utilisera le produit de Cauchy des séries)
c) Précisez alors la valeur de $T(x)$ pour $x \in [0, 1[$, puis celle de t_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
d) En conclure qu'il est presque sûr que la puce repassera par l'origine si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

III. Deuxième marche aléatoire

La puce se déplace toujours sur l'axe des abscisses mais à présent, chaque seconde, elle fait un saut de longueur 1, vers la droite avec la probabilité p, vers la gauche avec la probabilité q ou elle reste sur place avec la probabilité r ($p+q+r = 1$). Les sauts sont toujours indépendants les uns des autres et la puce part de l'origine. Notons X_n l'abscisse du point où se trouve la puce au bout de n secondes. Préciser l'espérance mathématique et la variance de X_n.

III. Troisième marche aléatoire

La puce se déplace à présent dans le plan. Elle part de l'origine et, chaque seconde, elle fait un saut de longueur 1. On note (X_n, Y_n) les coordonnées de la position de la puce à l'issue du $n^{ème}$ saut. On suppose enfin que le $i^{ème}$ saut (pour tout i de $\mathbb{N}^*$) est exécuté dans une direction aléatoire repérée par son angle θ_i par rapport à l'axe des abscisses, les variables θ_i étant indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$.
1) Exprimer X_n et Y_n en fonction des $(\theta_i)_{i=1,\dots,n}$.
2) Montrer que les variables X_n et Y_n sont centrées et calculer leur variance.
3) Calculer la covariance $\text{cov}(X_n, Y_n)$ de X_n et Y_n.
4) Montrer : $\text{cov}(X_n^2, Y_n^2) = -\frac{n}{8}$.
(Indication : on utilisera les décompositions : $X_n = X_{n-1} + \cos\theta_n$ et $Y_n = Y_{n-1} + \sin\theta_n$.)
Que peut-on conclure de l'indépendance de X_n et Y_n ?
5) Calculer l'espérance mathématique du carré de la distance à l'origine de la puce à l'issue du $n^{ème}$ saut. Commenter.