CORRECTION – CAPES INTERNE 2001 – EXERCICE 2
MARCHE ALÉATOIRE SUR UN TRIANGLE

I. Préliminaires

1. On a $P(A_1)=r, P(B_1)=p, P(C_1)=q$ car, le point *M* étant en *A* à l'instant 0, il est en *A* à l'instant 1 s'il reste en *A*, donc avec la probabilité *r*, il est en *B* (sommet suivant *A*) à l'instant 1 avec la probabilité *p*, il est en *C* (sommet précédant *A*) à l'instant 1 avec la probabilité *q*.

2. Posons : $E_n = A_n \cup B_n \cup C_n$. L'événement E_n est réalisé si et seulement si, à l'instant *n*, le point *M* se trouve en l'un des sommets du triangle.
Par hypothèse, si, à l'instant *n*, le point *M* se trouve en l'un des sommets du triangle, alors, à l'instant *n*+1, *M* se trouve au sommet suivant avec la probabilité *p*, *M* se trouve au sommet précédent avec la probabilité *q*, *M* reste au même sommet avec la probabilité *r*.
Cette hypothèse peut se traduire par $P\left(E_{n+1}/E_n\right)=p+q+r$ (à condition d'avoir $P\left(E_n\right)\neq 0$).
Comme on a supposé : $p+q+r=1$, on a par hypothèse : $P\left(E_{n+1}/E_n\right)=1$ (à condition d'avoir $P\left(E_n\right)\neq 0$).

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $P(A_n)+P(B_n)+P(C_n)=1$.
Notons que, pour tout entier naturel *n*, les événements A_n, B_n et C_n sont deux à deux incompatibles ; ils vérifient donc : $P(A_n)+P(B_n)+P(C_n)=P(A_n\cup B_n\cup C_n)$.
Il s'agit alors de montrer que, à tout instant *n*, le mobile se trouve sur un sommet du triangle *ABC* avec probabilité 1, c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}, P(E_n)=1$.
La propriété est vérifiée pour *n* = 0. En effet, à l'instant 0, le point *M* se trouve en *A* donc $P(A_0)=1,\ P(B_0)=0,\ P(C_0)=0$ et $P(E_0)=1$.
Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que l'on ait : $P(E_n)=1$. Le point *M* est donc à l'instant *n*, à l'un des sommets du triangle avec probabilité 1.

On peut noter la propriété suivante : si *A* est un événement de probabilité 1, alors, pour tout événement *B*, on a : $P\left(B\right)=P\left(B\cap A\right)=P\left(B/A\right)$ (*).
On a en effet : $P\left(B\right)=P\left(B\cap A\right)+P\left(B\cap \overline{A}\right)$; le deuxième terme est nul car $B\cap\overline{A}\subset\overline{A}$ et *P* est positive et croissante donc : $0\leq P\left(B\cap\overline{A}\right)\leq P\left(\overline{A}\right)=0$; le premier terme est égal à $P\left(B/A\right)$ car $P\left(A\right)=1$.
Comme on a $P(E_n)=1$ et $P\left(E_{n+1}/E_n\right)=1$, on déduit de la propriété (*) :
$P\left(E_{n+1}\right)=P(E_{n+1}/E_n)=1$.
On a donc montré que la propriété est vérifiée pour *n* = 0 et que, pour tout entier naturel *n*, si elle est vérifiée au rang *n*, elle est vérifiée au rang *n* + 1 ; la propriété est donc vérifiée pour tout entier naturel *n*.

3. On pose $a_n=P(A_n), b_n=P(B_n), c_n=P(C_n)$.
Comme, pour tout entier naturel *n*, les événements A_n, B_n et C_n sont deux à deux incompatibles et vérifient $P(A_n\cup B_n\cup C_n)=1$, on a en utilisant la propriété (*) :

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap (A_n \cup B_n \cup C_n)) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n)$
et, à condition d'avoir $P(A_n) \neq 0,\ P(B_n) \neq 0,\ P(C_n) \neq 0$, on en déduit :
$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} / A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} / B_n)P(B_n) + P(A_{n+1} / C_n)P(C_n).$
Comme on a : $P(A_{n+1} / A_n) = r,\ P(A_{n+1} / B_n) = q$ et $P(A_{n+1} / C_n) = p,$ on a montré, en utilisant les notations proposées : $a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n.$
On montre de la même façon, que l'on a :
$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} / A_n)P(A_n) + P(B_{n+1} / B_n)P(B_n) + P(B_{n+1} / C_n)P(C_n)$ et
$P(C_{n+1}) = P(C_{n+1} / A_n)P(A_n) + P(C_{n+1} / B_n)P(B_n) + P(C_{n+1} / C_n)P(C_n)$.

On obtient donc le système de relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + rb_n + qc_n \\ c_{n+1} = qa_n + pb_n + rc_n \end{cases}$$

Notons que ces égalités sont encore vérifiées si $P(A_n) = 0,\ P(B_n) = 0$ ou $P(C_n) = 0.$
En effet, supposons que l'on ait par exemple $P(A_n) = 0$.
Les événements $A_{n+1} \cap A_n,\ B_{n+1} \cap A_n$ et $C_{n+1} \cap A_n$, étant inclus dans A_n, sont de probabilités nulles, le premier terme du deuxième membre de chacune des trois équations est nul et le système de relations est encore vérifié. Le système est donc vérifié pour tout entier naturel *n*.

Notons que l'on a utilisé ici la propriété suivante : si $A_1, ..., A_n$ sont n événements ($n \geq 2$) deux à deux incompatibles et B un événement tel que $B \subset A_1 \cup ... \cup A_n$ alors :
$P(B) = \sum_{i \in \{1,...,n\}} P(B \cap A_i) = \sum_{\{i \in \{1,...,n\} / P(A_i) \neq 0\}} P(B \cap A_i) = \sum_{\{i \in \{1,...,n\} / P(A_i) \neq 0\}} P(B / A_i)P(A_i)$ (**).

4. On déduit immédiatement de la question 3 :

$$\begin{cases} a_2 = ra_1 + qb_1 + pc_1 = r^2 + 2pq \\ b_2 = pa_1 + rb_1 + qc_1 = q^2 + 2pr \\ c_2 = qa_1 + pb_1 + rc_1 = p^2 + 2qr \end{cases}$$

5. Dans le cas *a*) $r = 1$ (d'où $p = q = 0$), on a $a_{n+1} = a_n,\ \ b_{n+1} = b_n$ et $c_{n+1} = c_n$ pour tout entier naturel *n*. Les suites sont stationnaires et, puisque $a_0 = 1,\ \ b_0 = 0$ et $c_0 = 0,$ on en déduit, pour tout entier naturel *n* : $a_n = 1,\ \ b_n = 0$ et $c_n = 0.$ Le point *M* est immobile ; étant en *A* à l'instant 0, il reste en *A*.
Dans le cas *b*) $p = 1$ (d'où $q = r = 0$), on a $a_{n+1} = c_n,\ \ b_{n+1} = a_n$ et $c_{n+1} = b_n$ pour tout entier naturel *n*, et, comme on a par hypothèse $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0,$ on en déduit pour l'instant 1 : $b_1 = 1, a_1 = c_1 = 0,$ pour l'instant 2 : $c_2 = 1, a_2 = b_2 = 0$ et pour tout entier naturel *n* : $a_{n+3} = a_n,\ \ b_{n+3} = b_n$ et $c_{n+3} = c_n$. Le point *M* tourne dans le sens trigonométrique. Il est donc en *A* aux instants 0, 3, 6, …, en *B* aux instants 1, 4, 7, … et en *C* aux instants 2, 5, 8, …
Dans le cas *c*) $p = q = r\ (= \frac{1}{3})$, on a $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n) = b_{n+1} = c_{n+1} = \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel *n*. A chaque instant *n*, le point *M* se trouve en *A*, en *B* ou en *C* avec une probabilité de 1/3.

II Étude du cas $p = q$

A. Dans le cas $p = q = \dfrac{1}{2}$ (et $r = 0$), on a pour tout entier n :

$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n + c_n),\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + c_n),\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0.$

1. n étant un entier naturel, on pose : $u_n = a_n - b_n,\ v_n = b_n - c_n,\ w_n = c_n - a_n.$

Montrons que les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont des suites géométriques. On a :

$u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(a_n - b_n) = -\dfrac{1}{2}u_n$ et $u_0 = 1$

$v_{n+1} = b_{n+1} - c_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(b_n - c_n) = -\dfrac{1}{2}v_n$ et $v_0 = 0$

$w_{n+1} = c_{n+1} - a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(c_n - a_n) = -\dfrac{1}{2}w_n$ et $w_0 = -1$

Les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont donc des suites géométriques, toutes trois de raison –1/2 et de premier terme 1 pour (u_n), 0 pour (v_n) et –1 pour (w_n).

2. On peut alors exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n uniquement.

On a pour tout entier naturel n :

$u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n u_0 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n,\ \ v_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n v_0 = 0$ et $w_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n w_0 = -\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n.$

La suite (v_n) est donc la suite nulle.

3. Montrons que, pour tout entier naturel n, on a : $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

On a en effet : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{1}{2}(b_{n+1} + c_{n+1}) = \dfrac{1}{4}(2a_n + b_n + c_n) = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}a_{n+1}$ et le résultat.

4. Exprimons a_n, b_n, c_n en fonction de n uniquement.

Si r et s sont des nombres réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2r^{n+2} = r^{n+1} + r^n,\ 2s^{n+2} = s^{n+1} + s^n$, ils vérifient, pour tout n de $\mathbb{N}$: $x^n(2x^2 - x - 1) = 0$, c'est-à-dire, $x = 0$ ou $2x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire encore $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

Si $r = 0$ ou $s = 0$ ou $r = s$, l'écriture $a_n = \alpha r^n + \beta s^n$ devient $a_n = \gamma t^n$, c'est-à-dire le terme général d'une suite géométrique, ce que la suite (a_n) n'est pas. Aussi, r et s sont les deux solutions de l'équation : $2x^2 - x - 1 = 0$, soit $r = 1$ et $s = -\dfrac{1}{2}$ par exemple.

On détermine α et β à partir des équations : $a_n = \alpha + \beta\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour $n = 0$ et $n = 1$:

$1 = \alpha + \beta$ et $0 = \alpha - \dfrac{1}{2}\beta$ d'où $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $\beta = \dfrac{2}{3}$.

On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = a_n - u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $c_n = b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ car $v_n = 0$.

On en déduit : $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}$.

Pour *n* assez grand, le point *M* a quasiment la même probabilité 1/3 de se trouver en *A*, en *B* ou en *C*.

B. *Généralisation.* Soit maintenant $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

Dans le cas $p = q$ (d'où $r = 1 - 2p$) on a pour tout entier naturel *n* :

$$\begin{cases} a_{n+1} = (1-2p)a_n + pb_n + pc_n \text{ et } a_0 = 1 \\ b_{n+1} = pa_n + (1-2p)b_n + pc_n \text{ et } b_0 = 0 \\ c_{n+1} = pa_n + pb_n + (1-2p)c_n \text{ et } c_0 = 0 \end{cases}$$

1. *n* étant un entier naturel, on pose : $u_n = a_n - b_n$, $v_n = b_n - c_n$, $w_n = c_n - a_n$.

Montrons que les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont des suites géométriques. On a :

$u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = (1-3p)(a_n - b_n) = (1-3p)u_n$ et $u_0 = 1$

$v_{n+1} = b_{n+1} - c_{n+1} = (1-3p)(b_n - c_n) = (1-3p)v_n$ et $v_0 = 0$

$w_{n+1} = c_{n+1} - a_{n+1} = (1-3p)(c_n - a_n) = (1-3p)w_n$ et $w_0 = -1$

Les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont donc des suites géométriques, toutes trois de raison $(1-3p)$ et de premier terme 1 pour (u_n), 0 pour (v_n) et –1 pour (w_n).

2. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1-3p)^n$, $v_n = 0$ et $w_n = -(1-3p)^n$.

La suite (v_n) est la suite nulle.

3. Montrons que, pour tout entier naturel *n*, on a : $a_{n+2} = (p+2r)\, a_{n+1} + (2p^2 - pr - r^2)\, a_n$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} &= (1-2p)a_{n+1} + p(b_{n+1} + c_{n+1}) = (1-2p)a_{n+1} + p(2pa_n + (1-p)(b_n + c_n)) \\ &= (1-2p)a_{n+1} + 2p^2 a_n + (1-p)(a_{n+1} - (1-2p)a_n) = (2-3p)a_{n+1} + (3p-1)a_n\end{aligned}$$

et le résultat puisque l'on a : $p + 2r = 2 - 3p$ et $2p^2 - pr - r^2 = 3p - 1$.

4. Exprimons a_n, b_n, c_n en fonction de *n* uniquement. Comme précédemment, *r* et *s* sont les deux solutions de l'équation $x^2 - (2-3p)x - (3p-1) = 0$, soit $r = 1$ et $s = 1 - 3p$ par exemple. On détermine α et β à partir des équations : $a_n = \alpha + \beta(1-3p)^n$ pour $n = 0$ et $n = 1$, en notant que l'on a : $a_1 = 1 - 2p$, $1 = \alpha + \beta$ et $1 - 2p = \alpha + \beta(1-3p)$ d'où $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$.

On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3p)^n$, $b_n = a_n - u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3p)^n$, $c_n = b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3p)^n$ car $v_n = 0$.

Comme on a $0 < p \leq \frac{1}{2}$, on a $-\frac{1}{2} \leq 1 - 3p < 1$ et donc $|1\text{-}3\text{p}| < 1$.

On en déduit : $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}$.

Pour n assez grand, le point M a quasiment la même probabilité 1/3 de se trouver en A, en B ou en C.

III Étude du cas général

On suppose ici que p, q, r sont trois réels positifs tels que $p + q + r = 1$.

On se place dans l'espace vectoriel *complexe* $\mathbb{C}^3$, rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$.

1. Soient les vecteurs de $\mathbb{C}^3$: $u = (1,1,1)$; $v = (1, j, j^2)$; $w = (1, j^2, j)$.

a) Montrons que (u, v, w) est une base de $\mathbb{C}^3$. L'espace $\mathbb{C}^3$ étant un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, il suffit de montrer que (u, v, w) forme une famille libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. On a alors le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta j + \gamma j^2 = 0 \\ \alpha + \beta j^2 + \gamma j = 0 \end{cases} \text{ dont le déterminant est } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = 3(j^2 - j) = (1 - j)^3$$

Le déterminant étant non nul, le système d'équations n'admet qu'une solution : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(u, v, w) forme une famille libre et donc une base de $\mathbb{C}^3$.

On pose $V_n = (a_n, b_n, c_n)$ et on considère la matrice : $S = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$

Soit Φ l'application linéaire admettant S pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

D'après la partie I, on a donc, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = \Phi(V_n)$ et donc, matriciellement par rapport à la base canonique, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

b) Montrons que l'on a $\Phi(u) = u$, $\Phi(v) = \lambda\, v$, $\Phi(w) = \mu\, w$, avec :

$$\lambda = r + q\, j + p\, j^2,\ \ \mu = r + p\, j + q\, j^2.$$

En utilisant les écritures matricielles par rapport à la base canonique, on a en effet :

$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $p + q + r = 1$ donc $\Phi(u) = u$

$S \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + qj + pj^2 \\ p + rj + qj^2 \\ q + pj + rj^2 \end{pmatrix} = (r + qj + pj^2) \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ donc $\Phi(v) = \lambda v$ avec $\lambda = r + qj + pj^2$

$S \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + qj^2 + pj \\ p + rj^2 + qj \\ q + pj^2 + rj \end{pmatrix} = (r + pj + qj^2) \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ donc $\Phi(w) = \mu w$ avec $\mu = r + pj + qj^2$

On a donc montré que u, v, w sont des vecteurs propres de Φ associés respectivement aux valeurs propres 1, λ, μ de Φ.
Si on note D la matrice diagonale des valeurs propres et P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres correspondants, on a :

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix} \text{ et } S=PDP^{-1}.$$

c) Montrons que les modules des nombres complexes λ et μ sont inférieurs ou égaux à 1.
Comme on a $\mu=\overline{\lambda}$ on a $|\lambda|=|\mu|\le r+|qj|+|pj^2|=r+q+p=1$ et égalité si et seulement si les vecteurs r, qj et pj^2 de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sont colinéaires, c'est-à-dire, si et seulement si :
$p=0, q=0, r=1$ auquel cas on a $\lambda=\mu=1$ ou
$p=0, q=1, r=0$ auquel cas on a $\lambda=j$ et $\mu=j^2$ ou
$p=1, q=0, r=0$ auquel cas on a $\lambda=j^2$ et $\mu=j$.

2. Déterminons les coordonnées (x_0, y_0, z_0) de V_0 dans la base (u,v,w).
On a $V_0=(a_0,b_0,c_0)=(1,0,0)$ et on cherche x_0, y_0 et z_0 tels que
$V_0=x_0u+y_0v+z_0w=(x_0+y_0+z_0, x_0+jy_0+j^2z_0, x_0+j^2y_0+jz_0)$
d'où le système d'équations :

$$\begin{cases} x_0+y_0+z_0=1\\ x_0+jy_0+j^2z_0=0\\ x_0+j^2y_0+jz_0=0\end{cases}$$

On a déjà vu que le déterminant de ce système $\Delta=3(j^2-j)$ est non nul. Le système admet donc une solution unique : $x_0=\Delta_{x_0}/\Delta, y_0=\Delta_{y_0}/\Delta, z_0=\Delta_{z_0}/\Delta,$ avec :

$$\Delta_{x_0}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&j&j^2\\0&j^2&j\end{vmatrix}=j^2-j, \Delta_{y_0}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&j^2\\1&0&j\end{vmatrix}=j^2-j, \Delta_{z_0}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&j&0\\1&j^2&0\end{vmatrix}=j^2-j$$

Les coordonnées (x_0, y_0, z_0) de V_0 dans la base (u,v,w) sont donc $x_0=y_0=z_0=\dfrac{1}{3}.$

Remarques : (i) on a $u+v+w=3e_0=3V_0$ donc $V_0=\dfrac{1}{3}u+\dfrac{1}{3}v+\dfrac{1}{3}w$ et $(x_0,y_0,z_0)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$
(nettement plus rapide !)
(ii) on a aussi $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$ avec $V_0=(a_0,b_0,c_0)=(1,0,0)$ et $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$
(à calculer, plus compliqué).

3. Calculons a_n, b_n, c_n. Il s'agit des coordonnées de V_n dans la base canonique.
De la relation $V_{n+1}=\Phi(V_n)$, on déduit que l'on a pour tout *n* entier naturel $V_n=\Phi^n(V_0)$.

Dans la base (u,v,w) de vecteurs propres de Φ, la matrice de Φ est diagonale, égale à D

La matrice de Φ^n dans cette base est donc D^n, soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix}$.

Si l'on note (x_n, y_n, z_n) les coordonnées de V_n dans la base (u,v,w) on a donc :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\lambda^n \\ \frac{1}{3}\mu^n \end{pmatrix}$$

. Comme on a, pour tout entier naturel n :

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, on en déduit : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\lambda^n \\ \frac{1}{3}\mu^n \end{pmatrix}$. En utilisant la relation $\mu = \overline{\lambda}$, et donc aussi $\mu^n = \overline{\lambda^n}$, $j^2\mu^n = \overline{j\lambda^n}$ et $j\mu^n = \overline{j^2\lambda^n}$, on obtient l'expression de a_n, b_n, c_n,

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda^n + \frac{1}{3}\mu^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{Re}(\lambda^n) \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} j\lambda^n + \frac{1}{3} j^2\mu^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{Re}(j\lambda^n) \qquad \text{avec } \lambda = r + qj + pj^2. \\ c_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} j^2\lambda^n + \frac{1}{3} j\mu^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{Re}(j^2\lambda^n) \end{cases}$$

4. On a vu en III 1. c) que le module de λ est inférieur ou égal à 1 et qu'il est égal à 1 si et seulement si :

$p = 0, q = 0, r = 1$ auquel cas on a $\lambda = \mu = 1$ ou

$p = 0, q = 1, r = 0$ auquel cas on a $\lambda = j$ et $\mu = j^2$ ou

$p = 1, q = 0, r = 0$ auquel cas on a $\lambda = j^2$ et $\mu = j$.

Dans le premier cas, on a alors pour tout n entier naturel $a_n = 1, b_n = c_n = 0$, le point M est stationnaire en A.

Dans le deuxième cas, on a alors pour tout n entier naturel
$a_{3n} = 1, b_{3n} = 0, c_{3n} = 0,\ a_{3n+1} = 0, b_{3n+1} = 1, c_{3n+1} = 0,\ a_{3n+2} = 0, b_{3n+2} = 0, c_{3n+2} = 1$, le point M tourne dans le sens trigonométrique, il est donc en A aux instants 0, 3, 6, … en B aux instants 1, 4, 7, … en C aux instants 2, 5, 8, …

Dans le troisième cas, on a alors pour tout n entier naturel
$a_{3n} = 1, b_{3n} = 0, c_{3n} = 0,\ a_{3n+1} = 0, b_{3n+1} = 0, c_{3n+1} = 1,\ a_{3n+2} = 0, b_{3n+2} = 1, c_{3n+2} = 0$, le point M tourne dans le sens opposé au sens trigonométrique, il est donc en A aux instants 0, 3, 6, … en C aux instants 1, 4, 7, … en B aux instants 2, 5, 8, …

Dans tous les autres cas le module de λ est strictement inférieur à 1. Comme on a :

$\mathrm{Re}(\lambda^n) \le |\lambda^n|$, $\mathrm{Re}(j\lambda^n) \le |j\lambda^n| = |\lambda|^n$, $\mathrm{Re}(j^2\lambda^n) \le |j^2\lambda^n| = |\lambda|^n$ et $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$ on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(\lambda^n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(j\lambda^n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(j^2\lambda^n) = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

Pour n assez grand, le point M a quasiment la même probabilité 1/3 de se trouver en A, en B ou en C.

En conclusion, on a montré dans ce problème que :

- si $r = 1$, le point M reste en A,
- si $p = 1$, le point mobile tourne dans le sens trigonométrique, il est donc en A aux instants 0, 3, 6, … en B aux instants 1, 4, 7, … en C aux instants 2, 5, 8, …
- si $q = 1$, le point mobile tourne dans le sens opposé au sens trigonométrique il est donc en A aux instants 0, 3, 6, … en C aux instants 1, 4, 7, … en B aux instants 2, 5, 8, …
- dans tous les autres cas, quelles que soient les probabilités p, q, r de passer au sommet suivant, au sommet précédent ou de rester sur place, à condition d'être différentes de 1, pour n assez grand, le point M a quasiment la même probabilité 1/3 de se trouver en A, en B ou en C.

Commentaire :

Nous avons étudié dans toute sa généralité un graphe probabiliste d'ordre 3 de matrice de transition :

$$S = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$$

le graphe probabiliste associé est alors :