CAPES INTERNE 2001 – EXERCICE 2
MARCHE ALÉATOIRE SUR UN TRIANGLE

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on considère les points : A d'affixe 1, B d'affixe $e^{2i\frac{\pi}{3}}$, C d'affixe $e^{4i\frac{\pi}{3}}$, (i désignant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$). Soit r la rotation de centre O dont l'angle a pour mesure en radians $\frac{2\pi}{3}$.

Par convention, étant donné un sommet quelconque, X, du triangle ABC, on dira que le sommet Y est le sommet suivant de X (ou que Y suit X) si $Y = r(X)$; on pourra dire également que X est le sommet précédent de Y (ou que X précède Y). Ainsi : B suit A, C suit B, A suit C. Ou encore : A précède B, B précède C, C précède A.

Un point mobile, M, parcourt aléatoirement le triangle ABC de la façon suivante : soient n un entier naturel et p, q, r, trois réels positifs tels que $p + q + r = 1$; si, à l'instant n, le point M se trouve en un sommet donné du triangle ABC, alors, à l'instant n+1 :

M se trouvera au sommet suivant avec la probabilité p,

M se trouvera au sommet précédent avec la probabilité q,

M restera au même sommet avec la probabilité r.

Étant donné un sommet quelconque, X, du triangle ABC, on désigne par X_n l'événement : " à l'instant n, le point M se trouve en X" et par $P(X_n)$ la probabilité de cet événement. À l'instant 0, le point M se trouve en A ; on a donc : $P(A_0) = 1, P(B_0) = 0, P(C_0) = 0.$

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement du point M lorsque n tend vers l'infini, dans quelques cas particuliers, puis dans le cas général.

I. Préliminaires

1. Calculer $P(A_1), P(B_1), P(C_1)$.

2. Démontrer, que, pour tout entier naturel n, on a : $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$.

3. On pose $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n)$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= r\, a_n + q\, b_n + p\, c_n \\ b_{n+1} &= p\, a_n + r\, b_n + q\, c_n \\ c_{n+1} &= q\, a_n + p\, b_n + r\, c_n \end{aligned}$$

4. Calculer a_2, b_2, c_2.

5. Étudier le comportement du point M dans les trois cas particuliers suivants :

a) $r = 1$ (d'où $p = q = 0$) b) $p = 1$ (d'où $q = r = 0$) c) $p = q = r$ $(= \frac{1}{3})$

II Étude du cas *p* = *q*

A. On se place dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$ (et $r = 0$).

1. n étant un entier naturel, on pose : $u_n = a_n - b_n$, $v_n = b_n - c_n$, $w_n = c_n - a_n$.

Démontrer que les suites $\left(u_n\right), \left(v_n\right), \left(w_n\right)$ sont des suites géométriques.

2. Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n uniquement. Que peut-on dire de la suite $\left(v_n\right)$?

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

4. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n uniquement. On admettra que toute suite (a_n) vérifiant $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ s'écrit $a_n = \alpha r^n + \beta s^n$ où α, β, r, s sont des nombres réels que l'on déterminera, r et s vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2r^{n+2} = r^{n+1} + r^n,\ 2s^{n+2} = s^{n+1} + s^n.$$

Puis étudier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$.
Que peut-on conclure pour le comportement du point M ?

B. *Généralisation.* Soit maintenant $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On se place dans le cas $p = q$ (d'où $r = 1 - 2p$) et on généralise l'étude faite ci-dessus, en utilisant les mêmes notations.

1. Démontrer que les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont des suites géométriques.

2. Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n uniquement. Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+2} = (p + 2r)\, a_{n+1} + (2p^2 - pr - r^2)\, a_n$.

4. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n uniquement, puis étudier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$. Que peut-on déduire pour le comportement du point M ? (On utilisera, pour le calcul de a_n une méthode analogue à celle indiquée en A.4.).

III Étude du cas général

On suppose ici que p, q, r sont trois réels positifs tels que $p + q + r = 1$.
On se place dans l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^3$, rapporté à sa base canonique. On pose $V_n = (a_n, b_n, c_n)$ et on considère la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$$

Soit Φ l'application linéaire admettant S pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$. D'après la partie I, on a donc, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = \Phi(V_n)$.

1. On note j la racine cubique de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive ($j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$).

Soient les vecteurs de $\mathbb{C}^3$: $u = (1, 1, 1)$; $v = (1, j, j^2)$; $w = (1, j^2, j)$.

a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{C}^3$.

b) Démontrer que l'on a $\Phi(u) = u$, $\Phi(v) = \lambda\, v$, $\Phi(w) = \mu\, w$, avec :

$$\lambda = r + q\, j + p\, j^2,\ \mu = r + p\, j + q\, j^2.$$

c) Démontrer que les modules des nombres complexes λ et μ sont inférieurs ou égaux à 1 (on précisera pour quelles valeurs de p, q, r a lieu l'égalité, ainsi que les valeurs de λ et μ correpondantes).

2. Déterminer les coordonnées (x_0, y_0, z_0) de V_0 dans la base (u, v, w).

3. Calculer a_n, b_n, c_n.

4. Déterminer les limites éventuelles des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on en déduire pour le comportement du point M ?