Capes de mathématiques 2003, début de la 2$^{\text{ème}}$ composition
Solution

Indépendance et complémentation

1/ A et B sont indépendants, donc $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$;

$A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$ forment une partition de A donc :

$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)\left(1-P(B)\right)=P(A)P\left(\overline{B}\right)$

On a donc montré que si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

En échangeant les rôles de A et B on a montré aussi que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

En appliquant le résultat précédant à A et $\overline{B}$ (qui sont indépendants puisque A et B le sont), on montre que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2/ Montrons : $\left(A_1,\cdots,A_n\right)$ indép. $\Rightarrow\left(\overline{A}_1,A_2,\cdots,A_n\right)$ indép..

Soit $I\subset[\![1,n]\!]$, si $1\notin I$, $P\left(\bigcap_{i\in I}A_1\right)=\prod_{i\in I}P\left(A_i\right)$, car $\left(A_2,\ \ldots,\ A_n\right)$ sont indépendants.

Si $1\in I$, $P\left(\overline{A}_1\cap\left(\bigcap_{i\in I-\{1\}}A_i\right)\right)=P\left(\bigcap_{i\in I-\{1\}}A_i\right)-P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I-\{1\}}P\left(A_i\right)-\prod_{i\in I}P\left(A_i\right)$

$$=\left(1-P\left(A_1\right)\right)\prod_{i\in I-\{1\}}P\left(A_i\right)=P\left(\overline{A}_1\right)\prod_{i\in I-\{1\}}P\left(A_i\right)$$

et donc $\left(\overline{A}_1,\ A_2,\ldots,\ A_n\right)$ sont indép.

Montrons par récurrence sur j (allant de 1 à n) :

$\left(A_1,\cdots,A_n\right)$ indép. $\Rightarrow\left(\overline{A}_1,...,\overline{A}_j,A_{j+1}\cdots,A_n\right)$ indép..

On a montré ci-dessus la propriété pour j = 1.

Conséquence : en échangeant les rôles de A_1 et A_2, puis de A_1 et A_3, ..., puis de A_1 et A_n, on a montré :

$\left(A_1,\cdots,A_n\right)$ indép. $\Rightarrow\left(\overline{A}_1,A_2,\ \ldots,A_n\right)$ indép., $\left(A_1,\overline{A}_2,A_3,\ \ldots,A_n\right)$ indép.,…,

$\left(A_1,\ldots,A_{n-1},\overline{A}_n\right)$ indép.

Supposons la propriété vraie à l'indice j (avec $j<n$) ; les événements $\left(\overline{A}_1,...,\overline{A}_j,A_{j+1},\cdots,A_n\right)$ étant indépendants, en appliquant la conséquence de la propriété vue pour j = 1 à l'événement A_{j+1}, on montre $\left(\overline{A}_1,...,\overline{A}_j,A_{j+1}\cdots,A_n\right)$ indép. $\Rightarrow\left(\overline{A}_1,...,\overline{A}_j,\overline{A}_{j+1},A_{j+2},\cdots,A_n\right)$ indép.

La propriété est donc vérifiée pour j allant de 1 à n et on a donc montré en particulier :

$$\left(A_1,\cdots,A_n\right)\text{ indép.}\Rightarrow\left(\overline{A}_1,...,\overline{A}_j,\cdots,\overline{A}_n\right)\text{ indép.}$$

Comme on a $\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A}_i$, on en déduit :

$P\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=1-P\left(\bigcap_{i\in I}\overline{A}_i\right)=1-\prod_{i\in I}P\left(\overline{A}_i\right)=1-\prod_{i\in I}\left(1-P\left(A_i\right)\right)=1-(1-p)^n$ si $P(A_i)=p$, pour tout i de $[\![1,n]\!]$.

Indicateur d'Euler

1/ On a : $A=\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}$ car "m est premier avec n" si, et seulement si, pour tout i de $[\![1,k]\!]$, m n'est pas divisible par p_i. On en déduit :

$A=\overline{\bigcup_{i=1}^{k}A_i}=$ et $\varphi(\mathrm{n})=\mathrm{card}(A)=n-\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)$

$\forall i\in[\![1,k]\!],\ A_i=\left\{q\in[\![1,n]\!];\ p_i\,|q\right\}=\left\{p_i,2p_i,\dots,q_ip_i\right\}$ avec $q_i=(n/p_i)\in[\![1,n]\!]$ puisque p_i divise n.

On a donc $Card(A_i)=n/p_i$.

De même, $\forall(i,j)\in[\![1,k]\!]^2,\ i\neq j$, on a $p_i\,|q$ et $p_j\,|q\Leftrightarrow p_ip_j\,|q$ donc

$A_i\cap A_j=\left\{q\in[\![1,n]\!];\ p_ip_j\,|q\right\}=\left\{p_ip_j,2p_ip_j,\dots,q_{ij}p_ip_j\right\}$ avec $q_{ij}=(n/p_ip_j)\in[\![1,n]\!]$ puisque p_i et p_j divisent n. On a donc $Card(A_i\cap A_j)=n/p_ip_j$.

Par récurrence finie, on obtient :

$\forall J\subset[\![1,k]\!],\ Card(\bigcap_{i\in J}A_i)=\dfrac{n}{\prod_{i\in J}p_i}$ et donc en particulier pour $J=[\![1,k]\!]$.

En utilisant la formule de Poincaré pour le cardinal, on a :

$$Card\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}Card(A_i)+\dots+(-1)^{j+1}\sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le k}Card\left(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_j}\right)+\dots+(-1)^{k+1}Card\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)$$

$$=n\Big[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}+\dots+(-1)^{j+1}\sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le k}\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}+\dots+(-1)^{k+1}\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}p_i}\Big]$$

$$\varphi(n)=n-Card\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=n\Big[1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}+\dots+(-1)^{j}\sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le k}\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_j}}+\dots+(-1)^{k}\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}p_i}\Big]$$

$$=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\ \text{(E)}$$

2/ P est la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $Card(A)=\varphi(n)$ donc $P(A)=\dfrac{\varphi(n)}{n}$.

Comme on a : $\forall \mathrm{J}\subset[\![1,\mathrm{k}]\!],\ Card(\bigcap_{i\in J}A_i)=\dfrac{n}{\prod_{i\in J}p_i}$, on en déduit :

$\forall J\subset[\![1,k]\!],\ P(\bigcap_{i\in J}A_i)=\dfrac{1}{\prod_{i\in J}p_i}=\prod_{i\in J}P(A_i)$,

les événements $(A_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ sont donc mutuellement indépendants.

On sait que, si $(A_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, il en est de même de la famille des événements contraires (exercice 7.13).

Comme on a : $A=\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}$, on en déduit : $P(A)=P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}P\left(\overline{A_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)$ c'est-à-dire :

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\quad \text{(E)}$$