CAPES de Mathématiques 2003 ; début de la 2ème composition

Indépendance et complémentation

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

a) Soit A et B des événements indépendants. Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants, puis que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

b) Soit n un entier naturel non nul et $A_1, A_2, ..., A_n$ n événements indépendants.

Montrer que $\overline{A}_1, A_2, ..., A_n$ sont indépendants.

Montrer par récurrence que $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ sont indépendants.

En déduire : $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - P(A_i)\right)$.

(Si $\exists p \in \left]0,1\right[$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $P(A_i) = p$, on a alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1-p)^n$)

Indicateur d'Euler

On appelle indicateur d'Euler de l'entier naturel n strictement supérieur à 1 le cardinal, noté $\varphi(n)$, de l'ensemble des entiers m de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n.

On suppose que la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. L'objectif est de montrer l'égalité :

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad \text{(E)}.$$

On note A l'ensemble des entiers m de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n et, pour $i \in [\![1, k]\!]$, on pose $A_i = \left\{q \in [\![1, n]\!]\,;\, p_i | q\right\}$.

1) Écrire l'ensemble A en fonction des $(A_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$. Calculer le cardinal de A_i, de $A_i \cap A_j$, …

Montrer l'égalité (E) en utilisant la formule de Poincaré (pour le cardinal).

2) Soit P la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Exprimer $P(A)$ en fonction de n et de $\varphi(n)$.

Montrer que, pour $i \in [\![1, k]\!]$, on a : $P(A_i) = \dfrac{1}{p_i}$.

Montrer que les $(A_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ sont mutuellement indépendants.

Exprimer A à l'aide des $(\overline{A}_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ et en déduire l'égalité (E).