# Loi de la somme de deux v.a.r. indépendantes binomiales
# Loi de la somme de deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson

## Loi de la somme de deux v.a.r. indépendantes binomiales

$$P([S=k]) = P\left(\bigcup_{\{(k_1,\ k_2)|k_1+k_2=k\}} [X_1=k_1]\cap[X_2=k_2]\right)$$
$$= \sum_{\{(k_1,k_2)|k_1+k_2=k\}} P([X_1=k_1]\cap[X_2=k_2])$$

car il s'agit de la réunion d'événements deux à deux incompatibles.

$$P([S=k]) = \sum_{\{(k_1,k_2)|k_1+k_2=k\}} P([X_1=k_1])P([X_2=k_2])$$

car les v.a.r. $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.

$$P([S=k]) = \sum_{\{(k_1,k_2\ |k_1+k_2=k)\}} \binom{n_1}{k_1} p^{k_1}(1-p)^{n_1-k_1}\ \binom{n_2}{k_2} p^{k_2}(1-p)^{n_2-k_2}$$
$$= \left(\sum_{k_1=0}^{k}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k-k_1}\right) p^k(1-p)^{n_1+n_2-k} \text{ (avec la convention } \binom{n}{p}=0 \text{ si } p>n)$$
$$= \binom{n_1+n_2}{k} p^k(1-p)^{n_1+n_2-k} \text{ ( par la formule de Vandermonde).}$$

## Loi de la somme de deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson

$$P([S=n]) = \sum_{k=0}^{n} P([X_1=k]\cap[X_2=n-k])$$

car il s'agit de la réunion d'événements deux à deux incompatibles.

$$P([S=n]) = \sum_{k=0}^{n} P([X_1=k])P([X_2=n-k])$$

car les v.a.r. $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.

$$P([S=n]) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$

(par la formule du binôme)