Introduction aux probabilités

Ce texte a été rédigé en mars 2008 à l'occasion de l'introduction des probabilités en classe de troisième et s'adresse aux professeurs de mathématiques chargés de cette introduction ou à toute personne souhaitant découvrir les probabilités.

Pré requis :

statistique descriptive, en particulier *distribution de fréquences* $\{(x_i, f_i); i = 1, \dots, r\}$, moyenne pondérée, calculs sur les fréquences...

Progression

1. Discussion sur les *représentations du "hasard"* des élèves, du hasard dans la vie courante, du vocabulaire utilisé ; sûr et certain, probable, improbable, possible, impossible, coïncidence, *chance*, *risque*, pari, ..., *événement* heureux, événement malheureux, événement fortuit, coïncidence, ... On notera qu'il s'agit d'un hasard "subi", imprévisible, ...

2. On s'intéresse à un *événement futur* et on cherche à évaluer ses possibilités de réalisation (sa *probabilité*). On convient de *mesurer* cette *probabilité* par un nombre compris entre 0 et 1 (entre 0% et 100%) : 0 pour *impossible*, 100% pour *certain* et entre les deux selon les *informations* dont on dispose.

Quelle est la probabilité que le soleil se lève demain ? Réponse 1 (100%)

Quelle est la probabilité que le soleil ne se lève pas demain ? Réponse 0 (0%)

Quelle est la probabilité que la température à Toulouse soit de plus de 30 degrés demain après-midi ? de moins de 10 degrés ? comprise entre 10 et 30 degrés ? Réponse : 5%, 90% et 5% ou bien 0%, 100%, 0% ... cela se discute, que donnent les prévisions météorologiques ?

Distribution de probabilité (une parmi d'autres) :

Événements	moins de 10	entre 10 et 30	plus de 30	Ensemble
Probabilité	5%	90%	5%	1

On pourra proposer la définition suivante :

Une *distribution de probabilité* (finie) est un ensemble (fini) pondéré de poids positifs de somme 1.

Les distributions de probabilité sont utilisées pour la modélisation de phénomènes dépendant du hasard afin de décrire le phénomène et d'en prévoir l'évolution future.

3. Générateurs de hasard

Dans le cours sur les probabilités, on utilise des *instruments* générant un hasard en partie "prévisible". C'est un "hasard construit", dont on pourra étudier le comportement :

- on lance une pièce de monnaie équilibrée,
- on lance un dé cubique équilibré,
- on tire "au hasard" une carte d'un jeu de 32 cartes,
- on tire "au hasard" une boule d'une urne contenant 10 boules numérotées de 0 à 9.

On *génère* ainsi des *résultats équiprobables* : pile ou face avec probabilité 1/2 pour le lancer de la pièce de monnaie, un des chiffres de 1 à 6 avec probabilité 1/6 pour le lancer du dé, un des chiffres de 0 à 9 avec probabilité 1/10 pour le tirage dans l'urne, une des 32 cartes avec probabilité 1/32 pour le tirage dans le jeu de cartes, etc.

L'étude de ces expériences de base est utile pour, dans un deuxième temps, *modéliser* des situations de la vie courante.

Les calculatrices et les tableurs disposent d'une touche ou d'une fonction permettant de simuler des nombres pseudo-aléatoires selon la loi uniforme continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$, ou des nombres pseudo-aléatoires selon la loi uniforme discrète sur $\{0, \dots, 9\}$ ou sur $\{1, \dots, n\}$ (n entier supérieur à 1).

4. Propriétés de la probabilité des événements

On tire avec équiprobabilité une carte d'un jeu de 32 cartes ; quelle est la probabilité d'obtenir l'as de pique ? l'as de cœur ? l'as de carreau ? l'as de trèfle ? quelle est la probabilité d'obtenir un as ? quelle est la probabilité d'obtenir un roi ? quelle est la probabilité d'obtenir un as ou un roi ? quelle est la probabilité d'obtenir un pique ? quelle est la probabilité d'obtenir un as ou un pique ?

Une urne opaque contient 30 boules indiscernables au toucher, 20 rouges et 10 blanches. On choisit "au hasard" une boule de l'urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

Une classe est composée de 30 élèves ; en seconde langue 20 étudient l'espagnol et les 10 autres l'allemand. On choisit un élève "au hasard", quelle est la probabilité que cet élève étudie l'espagnol ?

5. Transport d'une distribution de probabilité par une application

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont marquées de 1 à 6. On gagne (G) si le 1 sort, on perd (P) dans tous les autres cas.

Présentation dans un tableau de la nouvelle *distribution de probabilité* :

résult	G	P
proba	1/6	5/6

6. Equivalence de procédures de génération d'une distribution de probabilité

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, le 6 correspond au gain, les autres chiffres à la perte.

On lance une roue de loterie ayant six secteurs angulaires égaux numérotés de 1 à 6, le 1 correspond au gain, les autres à la perte.

On tire "au hasard" une boule dans une urne contenant 1 boule rouge (gain) et 5 boules blanches (perte).

On tire "au hasard" une boule dans une urne contenant 10 000 boules rouges (gain) et 50 000 boules de différentes couleurs autres que rouge (perte).

7. Approche dite fréquentiste de la probabilité (estimation)

On lance une punaise 100 fois. Elle tombe sur la tête 75 fois et sur la pointe 25 fois. On la lance une fois de plus. Est-ce qu'on parie qu'elle tombe sur la tête ou sur la pointe ?

Commentaire : Dans cette situation, on estime la probabilité que la punaise tombe sur la tête par 0.75, fréquence de réalisation de cet événement sur 100 expériences réalisées successivement dans les mêmes conditions, quitte à modifier cette estimation si l'on poursuit les expériences.

8. Simulation

On lance une pièce de monnaie équilibrée 100 fois. Elle tombe sur face 55 fois et sur pile 45 fois. On la lance une fois de plus. Est-ce qu'on parie qu'elle tombe sur face ou sur pile ?

Commentaire : Dans cette situation, l'écart entre 55 (resp. 45) et la *fréquence théorique* 50 pour une pièce de monnaie équilibrée lancée 100 fois vient de la *fluctuation d'échantillonnage* dont l'étude est au programme de seconde. Nous pouvons parier indifféremment sur face ou sur pile car la probabilité de ces deux résultats est la même, égale à 1/2.

9. Expériences aléatoires à deux épreuves.

Nous restreignons volontairement l'étude aux situations conduisant à l'équiprobabilité, situations pouvant être décrites par des arbres de dénombrement (et non des arbres pondérés).

Une urne opaque contient trois boules, deux rouges et une blanche, indiscernables au toucher.

1. On tire "au hasard" deux boules de l'urne, successivement, en remettant la première boule tirée dans l'urne avant de tirer la deuxième. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2. On tire "au hasard" deux boules de l'urne, successivement, sans remettre la première boule tirée dans l'urne avant de tirer la deuxième. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
3. On tire "au hasard" deux boules de l'urne, simultanément. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles ?

On lance simultanément deux pièces de monnaie indiscernables. Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles ?

Commentaires :

La question 3 et la dernière question ne sont pas des expériences aléatoires à deux épreuves mais leur modélisation peut s'y ramener.

Attention à la dernière expérience. On ne distingue visuellement que trois résultats "2 piles", "2 faces" et "1 pile et 1 face" puisque les pièces sont lancées simultanément. On a pourtant physiquement deux pièces qui chacune d'elle donne pile ou face avec équiprobabilité. D'où (en distinguant les pièces) quatre résultats équiprobables : pile-pile, face-face, pile-face et face-pile.

Exercices

E.1. Loterie : on lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on gagne quatre euros si le 1 sort, on perd un euro si le 2, le 3, le 4, le 5 ou le 6 sort. Le gain algébrique de cette loterie est donc soit + 4, soit - 1 ; avec quelle probabilité ?

Tableau de la *distribution de probabilité* :

résult	+ 4	- 1
proba	1/6	5/6

On lance le dé 40 fois de suite, écrire la suite des gains algébriques obtenus et les fréquences de - 1 et de + 4 obtenus.

La liste des 40 résultats est sans ordre ni périodicité mais - 1 apparaît plus souvent que le + 4 ; on donne la distribution de fréquences obtenues, "proche" de la distribution de probabilité ci-dessus.

Peut-on prévoir le gain algébrique du prochain lancer de ce dé ? Pas avec certitude mais on sait que - 1 a cinq fois plus de chance de sortir que + 4.

A-t-on intérêt à jouer à cette loterie ? Si oui, quel est le gain moyen que l'on peut espérer ? Si non, quelle est la perte moyenne que l'on peut craindre ?

Commentaire : Faire le lien avec le loto ; la société organisatrice ne redistribue qu'une partie du montant encaissé ; globalement les joueurs sont perdants, pour chaque joueur, la probabilité de gagner au loto est extrêmement faible.

E.2. On lance une pièce de monnaie équilibrée. Si c'est pile, on gagne, si c'est face, on peut relancer la pièce de monnaie. Si c'est pile, on gagne, si c'est face, on perd.

Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

Commentaire : Il s'agit du jeu "croix et pile", présenté dans un célèbre article de l'Encyclopédie par d'Alembert (1717-1783). Il critique la solution admise de lancer la pièce une deuxième fois même si pile est obtenu au premier lancer et de conclure que la probabilité de gagner est donc 3/4. Il propose de

ne considérer que les trois résultats "pile", "croix-pile" et "croix-croix" et de conclure que la probabilité de gagner est $2/3$.

On a bien équiprobabilité sur les 4 résultats pile-pile, pile-face, face-pile et face-face. Seul le dernier résultat fait perdre.

E.3. On tire "au hasard" une carte parmi les cinq cartes suivantes : le 7 de cœur, le 7 de carreau, le 7 de trèfle, le 8 de cœur et le 8 de trèfle. Quelle est la probabilité que ce soit un 7 ? Ayant aperçu qu'il s'agit d'un trèfle, quelle est la probabilité que ce soit le 7 de trèfle ?

Commentaire : On aborde ici les probabilités conditionnelles.

E.4. Une urne opaque contient trois jetons, un dont les deux faces sont rouges, un dont les deux faces sont blanches, un dont une face est rouge et l'autre blanche. On tire "au hasard" un jeton de l'urne et on pose le jeton sur la table sans voir la face de dessous. La face visible est rouge. Quelle est la probabilité que la face cachée soit rouge également ?

Commentaire : Encore des probabilités conditionnelles ... et un piège. En distinguant les faces, on a équiprobabilité sur les six faces des jetons. La réponse est $2/3$ et non $1/2$.