Formule du crible (ou de Poincaré)
Preuve par récurrence – Preuve en utilisant les indicatrices

Preuve par récurrence

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'évènements $(n \geq 2)$.
On a la formule dite du crible ou de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \text{ soit encore}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1\leq i\leq n} P(A_i) + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Preuve par récurrence sur *n*

L'égalité pour $n = 2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, est supposée avoir déjà été démontrée.

Soit $n \geq 2$. Supposons l'égalité vérifiée à l'ordre *n*. Montrons la à l'ordre $n+1$.
En utilisant l'égalité pour $n = 2$, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap A_{n+1}\right)$$

d'où, en utilisant la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right).$$

On utilise l'hypothèse de récurrence (ordre *n*) pour développer le 1^er terme ainsi que le 3^ème terme en décalant l'indice *k* d'une unité.

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{1\leq i\leq n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \\
&\quad + P(A_{n+1}) \quad - \sum_{1\leq i\leq n} P(A_i \cap A_{n+1}) + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{k-1}\leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1}\right) + \\
&\quad + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap \ldots A_n \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{1\leq i\leq n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n+1} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})
\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée à l'ordre $n+1$.

On a donc montré que l'égalité est vérifiée à l'ordre 2 et que, pour tout *n* supérieur ou égal à 2, si elle est vérifiée à l'ordre *n*, elle l'est aussi à l'ordre $n+1$.
La propriété est donc vérifiée pour tout *n* supérieur ou égal à 2.

Preuve en utilisant les indicatrices

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1) Soit A un événement et $\mathbf{1}_A$ l'indicatrice de A. Quelle est la loi de probabilité de $\mathbf{1}_A$?

On notera que $\mathbf{1}_A$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ et qu'il s'agit d'une variable aléatoire car A (et donc aussi $\overline{A}$) appartient à $\mathcal{A}$. La loi de probabilité de $\mathbf{1}_A$ est une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

2) Soient A et B deux événements. Écrire $\mathbf{1}_{\overline{A}}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire de A) ; écrire $\mathbf{1}_{A\cap B}$ et $\mathbf{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
En déduire : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

On a de façon évidente : $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\,\mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\,\mathbf{1}_B$.
Comme l'espérance mathématique d'une loi de Bernoulli de paramètre p est p, on en déduit le résultat.

3) Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'événements. Écrire $\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ en fonction des $(\mathbf{1}_{A_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$.
En déduire la formule de Poincaré.

On montre aisément par récurrence que l'on a $\mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$ et, si les événements $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux incompatibles, $\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$. Dans le cas général, on a :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \mathbf{1}_{A_i}\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mathbf{1}_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}}$$

et la formule de Poincaré en prenant les espérances mathématiques des premier et dernier membres.