Fonction génératrice des moments

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose, $\forall k \in \mathbb{N}, P([X = k]) = p_k$.

On lui associe la fonction suivante, dite fonction génératrice des moments de X :

$$\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, t^k \quad \left(= E\left(t^X\right)\right).$$

Justifier l'existence de G_X .

a. Déterminer la fonction génératrice de la loi de Bernoulli, d'une loi binomiale, d'une loi de Poisson.

b. Vérifier $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$. En déduire que deux variables aléatoires ont une même fonction génératrice si et seulement si elles ont même loi.

c. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Exprimer la fonction génératrice de la variable aléatoire $Y = X_1 + \ldots + X_n$ en fonction des fonctions génératrices de $X_1, \ \ldots, X_n$.

d. Retrouver, à l'aide des fonctions génératrices, les résultats concernant la somme de deux v.a.r. indépendantes de loi binomiale (resp. de loi de Poisson).

e. On peut montrer aussi que, si X est d'ordre n, G_X admet une dérivée $n^{\text{ème}}$ à gauche en 1 et
$G_X^{(n)}(1) = \sum_{k\geq n} k(k-1)...(k-n+1)p_k = E\left(X(X-1)...(X-n+1)\right)$
(ce nombre est appelé moment factoriel d'ordre n).

Solution

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ avec $P([X = k]) = p_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des moments est définie par : $\forall t \in [-1,1] \quad G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k\, t^k$.

Comme $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$, la série entière converge au moins sur l'intervalle $[-1,1]$

a) $X \sim \mathcal{B}(1,p) \quad X(\Omega) = \{0,1\} \qquad p_0 = 1-p \qquad p_1 = p$

$G_X(t) = (1-p) + pt$

$X \sim \mathcal{B}(n,p) \quad X(\Omega) = \{0,1,...,n\} \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pt)^n$$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

$$G_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$$

b) $\forall t \in [-1,1] \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k t^k$ est le développement en série entière de G_X au voisinage de 0.

G_X est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$. La loi de probabilité de X est donc définie de façon unique à partir de G_X

c) $G_Y(t) = E\left(t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} t^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(t^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$ car les variables $(X_1,\ldots,X_n)$ étant indépendantes, les variables $\left(t^{X_1},\ldots,t^{X_n}\right)$ sont indépendantes.

Si de plus les v.a.r. $X_1,\ldots,X_n$ sont de même loi que X, on a : $G_Y(t) = \left[G_X(t)\right]^n$

d) $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ X_1 et X_2 indépendantes $Y = X_1 + X_2$

$G_Y(t) = (1-p+pt)^{n_1}(1-p+pt)^{n_2} = (1-p+pt)^{n_1+n_2}$

d'après b) $Y \sim \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$

$X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ X_1 et X_2 indépendantes $Y = X_1 + X_2$

$G_Y(t) = e^{\lambda_1(t-1)}e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$

d'après b) $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$