

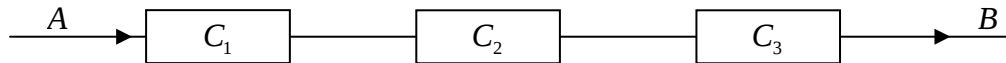
Circuits électriques

On se propose de calculer la probabilité de fonctionnement de quelques circuits électriques simples à l'aide des probabilités de fonctionnement de leurs composants.

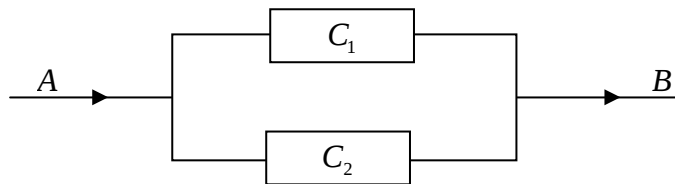
On note F_i l'événement "le composant C_i fonctionne" et p_i la probabilité de F_i . On suppose les événements F_i mutuellement indépendants.

Dans les trois cas suivants, le circuit fonctionne si le courant peut passer du point A au point B.

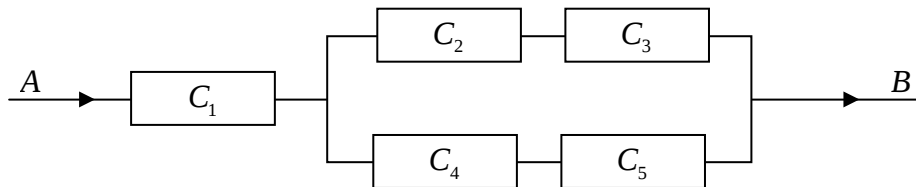
1/ *Circuit série*. Calculer la probabilité de fonctionnement du circuit suivant :



2/ *Circuit parallèle*. Calculer la probabilité de fonctionnement du circuit suivant :



3/ *Circuit mixte*. Calculer la probabilité de fonctionnement du circuit suivant lorsque tous les p_i sont égaux à p :



Solution

Pour $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, soit F_i l'événement : "le composant C_i fonctionne" et G l'événement : "le circuit fonctionne". Les $(F_i)_{i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket}$ sont supposés mutuellement indépendants.

1) Circuit en série. On a : $G = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ et l'hypothèse d'indépendance mutuelle des F_i permet d'écrire : $P(G) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(F_1)P(F_2)P(F_3) = p_1 p_2 p_3$.

2) Circuit en parallèle. On a : $G = F_1 \cup F_2$ d'où $P(G) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1)P(F_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ car F_1 et F_2 sont indépendants en probabilités.

3) Circuit mixte. On a : $G = F_1 \cap [(F_2 \cap F_3) \cup (F_4 \cap F_5)] = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_4 \cap F_5)$ d'où

$$\begin{aligned} P(G) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap F_4 \cap F_5) - P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5) = \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(F_1)P(F_4)P(F_5) - P(F_1)P(F_2)P(F_3)P(F_4)P(F_5) = \\ &= p_1 p_2 p_3 + p_1 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \text{ car les événements } (F_i)_{i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket} \text{ sont supposés mutuellement indépendants.} \end{aligned}$$

Remarque : On en déduit : $P(G) = p_1(p_2 p_3 + p_4 p_5 - p_2 p_3 p_4 p_5) = P(F_1)P((F_2 \cap F_3) \cup (F_4 \cap F_5))$ et donc

l'événement F_1 est indépendant de l'événement $(F_2 \cap F_3) \cup (F_4 \cap F_5)$. Ce résultat peut-être déduit d'une propriété qu'il est proposé d'admettre dans le programme du Capes complémentaire au programme du secondaire : si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors toute fonction de $(X_1, \dots, X_p)$ est indépendante de toute fonction de $(X_{p+1}, \dots, X_n)$. Si on note X_i l'indicatrice de F_i , $i = 1, \dots, 5$, alors l'hypothèse "les événements $(F_i)_{i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket}$ sont (mutuellement) indépendants", est équivalente à "les v.a.r. $(X_i)_{i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket}$ sont (mutuellement) indépendantes". On déduit de cette hypothèse que la v.a.r. X_1 est indépendante de la v.a.r. $Y = X_2 X_3 + X_4 X_5 - X_2 X_3 X_4 X_5$, indicatrice de $(F_2 \cap F_3) \cup (F_4 \cap F_5)$ et donc que l'événement F_1 est indépendant de l'événement $(F_2 \cap F_3) \cup (F_4 \cap F_5)$.