

Anonymat : réponse aléatoire lors d'une enquête

Exercice proposé dans le document d'accompagnement des programmes de Terminale ES et S

Dans le cadre d'une enquête sur le tabac dans un lycée, la question "est-ce que vous fumez plus d'un paquet de cigarettes par semaine : oui? non?" peut être considérée comme sensible, certains lycéens peuvent avoir des difficultés à répondre sincèrement.

Afin de protéger l'anonymat du lycéen quant à sa consommation de tabac, y compris vis-à-vis de l'enquêteur, l'enquêteur propose à chaque lycéen de réaliser en son absence la procédure suivante.

Lancer une pièce.

Si elle tombe sur pile, répondre à la question : "est-ce que vous fumez plus d'un paquet de cigarettes par semaine : oui ? non ?"

Si elle tombe sur face, relancer une deuxième fois la pièce et répondre à la question : "est-ce que vous êtes tombé sur pile au deuxième lancer: oui ? non ?"

Lorsque le questionnaire porte la mention "oui" (resp. "non") l'enquêteur ne peut pas savoir si le lycéen a répondu à la première ou à la deuxième question.

Soit p la proportion de "oui". Proposer une modélisation de cette procédure aléatoire et calculer en fonction de p la proportion de fumeurs (de plus d'un paquet de cigarettes par semaine) du lycée.

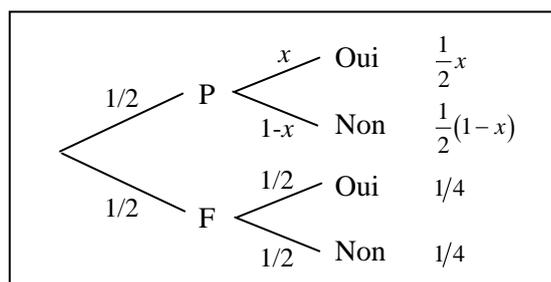
Solution

Soit Ω la population de lycéens qui ont participé à l'enquête.

Soit x la proportion de fumeurs et p la proportion de ceux qui ont répondu "oui" à la question.

On suppose que 1 lycéen sur 2 a obtenu pile (resp. face) au premier lancer (resp. au deuxième lancer le cas échéant) et on suppose que le fait de fumer est indépendant du fait d'obtenir pile lors du lancer d'une pièce de monnaie.

On a alors l'arbre de fréquences conditionnelles suivant :



On en déduit : $p = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ et donc $x = 2p - \frac{1}{2}$. On peut donc estimer la proportion x de fumeurs chez les lycéens sans rien connaître des réponses individuelles.