PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES (Exercices)

La terminologie n’est pas consacrée ; elle désigne les ***lois uniformes*** (mesures de longueurs, d'aires, de volumes).
- sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur finie et non nulle.
- sur un pavé de $\mathbb{R}^2$ $]-1,1[\times]-1,1[$, un disque de $\mathbb{R}^2$ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2\leq 1\right\}$ ou un cercle de $\mathbb{R}^2$ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2=1\right\}$
- sur un volume de $\mathbb{R}^3$ $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$ ou sur une surface de $\mathbb{R}^3$ $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2=1\right\}$.

Ce sont des lois de probabilité continues qui peuvent être une bonne introduction à cette notion, nouvelle au lycée.
Elles sont à la fois assez proches de l’intuition mais donnent lieu à la découverte d’événements observables et pourtant de probabilité nulle (les singletons) et à la découverte de quelques paradoxes.

Exercices

La plupart des exercices qui suivent sont inspirés de la brochure "*L'esprit des lois continues*" de l'IREM d'Aquitaine (cf. références), cf. aussi brochure de Michel Henry n67 (IREM de Franche Comté).

1/ On considère un segment $[\mathrm{A,B}]$ de longueur $l\ (l\in]0,1[)$ et un segment $[\mathrm{O}I]$ de longueur 1.
On choisit un point M au hasard (c’est-à-dire selon la loi uniforme) sur $[\mathrm{O}I]$.
On note E l’événement : "on peut construire un triangle de côtés OM, IM, et AB".
Calculer la probabilité de E.

2/ Un point $M(x,y)$ est choisi au hasard dans le carré $C=[0,1]\times[0,1]$.
Quelle est la loi de x ? la loi de y ?
Soit I et J deux intervalles de $[0,1]$. Montrer que les événements $[x\in I]$ et $[y\in J]$ sont indépendants en probabilité.

3/ Soit r un réel strictement positif fixé et θ une v.a.r. de loi uniforme sur $[0,2\pi[$.
On pose $X=r\cos\theta$ et $Y=r\sin\theta$.
Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ? Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes en probabilité ?

4/ Un point $M(x,y)$ est choisi au hasard sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
Est-ce que x (resp. y) suit la loi uniforme sur $[-1,1]$?

5/ Un point $M(x,y)$ est choisi au hasard dans le disque $\mathcal{D}$ de centre 0 et de rayon 1.
Est ce que x (resp. y) suit la loi uniforme sur $[-1,1]$?

6/ Soit $\mathcal{D}_R = \left\{ re^{i\gamma} \ ; r \in [0,R], \gamma \in [0,2\pi[\right\}$ le disque du plan complexe de centre O et de rayon R et $\mathcal{D}_{\frac{R}{2}} = \left\{ re^{i\gamma} \ ; r \in \left[0,\frac{R}{2}\right], \gamma \in [0,2\pi[\right\}$ le disque de rayon $\frac{R}{2}$.

On choisit au hasard un point de $\mathcal{D}_R$. Quelle est la probabilité qu'il soit dans $\mathcal{D}_{\frac{R}{2}}$?

- *1ère solution* : $\frac{1}{2}$. En effet, si on suppose que r suit une loi uniforme sur $[0,R]$ et γ une loi uniforme sur $[0,2\pi]$, enfin que r et γ sont des v.a.r. indépendantes en probabilité, alors la probabilité que le point choisi au hasard dans $\mathcal{D}_R$ appartienne à $\mathcal{D}_{\frac{R}{2}}$ est $\frac{1}{2}$.
- *2ème solution* : $\frac{1}{4}$. En effet, la loi uniforme sur $\mathcal{D}_R$ implique $\forall A \subset \mathcal{D}_R \ P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\pi R^2}$. Comme l'aire de $\mathcal{D}_{\frac{R}{2}}$ est $\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$, on en déduit que la probabilité cherchée est $\frac{1}{4}$.

Quelle est la bonne solution (si elle existe)?

7/ Le jeu de Franc-Carreau

"Le Mémoire sur le jeu de Franc-Carreau" de Buffon (1733) est le premier exemple connu de problème de probabilités dans un contexte purement géométrique.
Buffon se propose d'étudier le problème suivant :
"Dans une chambre pavée de carreaux égaux, on jette en l'air *un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau ; le second parie le contraire ? À quelle condition le jeu est-il équitable ?"*

Indications : On suppose évidemment que le diamètre d de la pièce de monnaie est strictement inférieur au côté a du carreau (carré). Le modèle se limite au carreau dans lequel tombe la pièce. On suppose que le centre de la pièce tombe "au hasard" à l'intérieur du carreau.

8/ L'aiguille de Buffon

Sur un parquet formé de planches régulières, on jette une aiguille de longueur inférieure à la largeur des planches. Quelle est la probabilité que l'aiguille coupe l'une des rainures du plancher ?

Indications : On propose de noter $2a$ la largeur des planches et $2l$ la longueur de l'aiguille. Soit x la distance du milieu de l'aiguille à la rainure du plancher la plus proche et θ l'angle que font les rainures du plancher avec l'aiguille. On supposera que x et θ sont des v.a.r. indépendantes en probabilité, que x suit une loi uniforme sur $[0,a]$ et θ une loi uniforme sur $[0,\pi[$.

9/ La corde de Bertrand

Le texte suivant est extrait de l'ouvrage *Le hasard* d'Emile Borel.

"Problème :
On choisit une corde au hasard dans un cercle.
Quelle est la probabilité pour que sa longueur soit supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit ?

***Première solution** : On peut, pour des raisons de symétrie, se donner la direction de la corde : le point d'intersection de cette corde avec le diamètre perpendiculaire à cette direction devra alors se* *trouver sur un segment égal à la moitié de la longueur de ce diamètre (car la distance au centre du côté du triangle équilatéral inscrit est égale à la moitié du rayon) ; la probabilité est donc* $\frac{1}{2}$

***Deuxième solution** : On peut, pour des raisons de symétrie, se donner une des extrémités de la corde sur le cercle ; la tangente en ce point et les deux côtés du triangle équilatéral inscrit ayant ce point pour sommet forment trois angles de 60° ; la direction de la corde doit être à l'intérieur de l'un de ces trois angles à l'exclusion des deux autres : la probabilité est donc* $\frac{1}{3}$.

***Troisième solution** : Pour fixer la position de la corde, il suffit de donner son milieu ; pour que la corde satisfasse à la condition de l'énoncé, il faut que son milieu soit intérieur à un cercle concentrique au cercle donné et de rayon moitié ; la surface de ce cercle est le quart de la surface donnée ; la probabilité est donc* $\frac{1}{4}$.

*Doit-on penser que ces trois solutions sont également bonnes et par suite également mauvaises ?
Nullement, il s'agit de préciser le mode d'après lequel se fera la vérification expérimentale, c'est-à-dire comment on s'y prendra pour tracer une corde au hasard dans un cercle : si l'on assujettit cette corde à passer par un point fixe du cercle, ou si l'on fixe son milieu au hasard, c'est la seconde ou la troisième solution qui est la bonne ; mais il est aisé de voir que la plupart des procédés naturels que l'on peut imaginer conduisent à la première.
Si, par exemple, on jette un disque circulaire sur un plan dans lequel sont tracées des droites, la probabilité pour que l'une des cordes interceptées soit supérieure au côté du triangle équilatéral* $\frac{1}{2}$ *; il en est de même si l'on considère les cordes interceptées sur le disque circulaire de la lune par la trajectoire d'une étoile occultée, ou les cordes décrites dans le champ circulaire d'une lunette astronomique par des astres que l'on n'a pas visés et qui occupent par suite une position quelconque dans le champ de la lunette."*

Pour chacune des trois solutions, détailler le raisonnement géométrique et probabiliste proposé.
Comment résumer le commentaire d'Emile Borel ?

PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES (Corrections)

1/ On note x la longueur de OM : x suit donc une loi uniforme sur $[0,1]$. L'événement E est réalisé si le point M vérifie $\mathrm{O}M + IM > AB$, $\mathrm{O}M + AB > IM$, $\mathrm{I}M + AB > \mathrm{O}M$, c'est-à-dire, si $x + l > 1 - x$ et $1 - x + l > x$, ou encore $\dfrac{1-l}{2} < x < \dfrac{1+l}{2}$.

D'où $P(E) = \dfrac{1+l}{2} - \dfrac{1-l}{2} = l$.

2/ L'aire du carré $\mathcal{C}$ étant 1, on a :

$$\forall a \in [0,1] \;\; P([x \le a]) = \text{aire}([0,a] \times [0,1]) = a \text{, donc } x \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$$

et il en est de même pour y. Enfin , on a :

$$P([x \in I] \cap [y \in J]) = \text{aire } (I \times J) = l(I) \times l(J)$$

où $l(I)$ et $l(J)$ désignent les longueurs de I et J et donc aussi les probabilités de $[x \in I]$ et de $[y \in J]$ puisque x et y suivent des lois uniformes sur $[0,1]$.

On a donc montré :

$$P([x \in I] \cap [y \in J]) = P([x \in I]) P([y \in J]),$$

les événements $[x \in I]$ et $[y \in J]$ sont indépendants en probabilité.

3/ X et Y sont à valeurs dans $[-r,r]$. On a $\forall x \in [-r,r]$:

$$F_X(x) = P([X \le x]) = P\left([\cos\theta] \le \frac{x}{r}\right) = P\left(\theta \in \left[Arc\cos\frac{x}{r}, 2\pi - Arc\cos\frac{x}{2}\right]\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} Arc\cos\frac{x}{r}$$

Cette fonction de répartition est dérivable sur $]-r,r[$; la v.a.r. X admet donc pour densité :

$$\forall x \in]-r,r[\quad f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{r^2 - x^2}}$$

On peut montrer directement (mais c'est un peu fastidieux) que

$$\forall y \in [-r,r] \quad f_Y(y) = P([Y \le y]) = \frac{1}{\pi} Arc\sin\frac{y}{r} + \frac{1}{2}$$

et

$$\forall y \in]-r,r[\quad f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{r^2 - y^2}}$$

Les v.a.r. X et Y sont donc de même loi, ce que l'on aurait pu obtenir sans calcul pour des raisons de symétrie.

On vérifie que l'on a bien :

$$\forall y \in [-r,r] \quad F_Y(y) = F_X(y)$$

(car $\forall t \in [-1,1] \quad Arc\cos t + Arc\sin t = 2\pi$).

4/ Non. Si x (la preuve est la même pour y) était uniforme sur $[-1,1]$ on aurait :

$$P\left(\left[x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}.$$

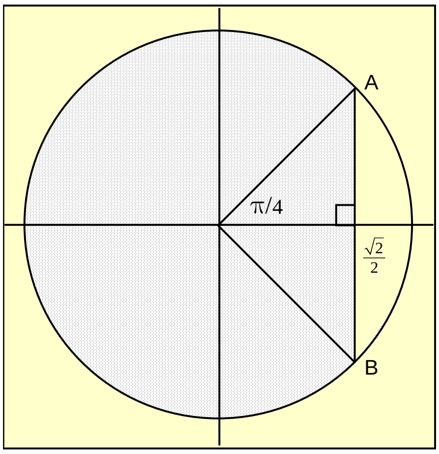
Or $\left[x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Leftrightarrow$ M est sur le grand arc de cercle d'extrémités $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La longueur de ce grand arc est $\frac{3\pi}{2}$ d'où $P\left(\left[x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \frac{3\pi/2}{2\pi} = \frac{3}{4}$.

x ne suit donc pas la loi uniforme sur $[-1,1]$.

5/ Non. Si x (la preuve est la même pour y) était uniforme sur $[-1,1]$ on aurait :

$$P\left(\left[x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}.$$



Or $\left[x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Leftrightarrow$ M appartient à la surface hachurée.

L'aire de cette surface hachurée est : $\pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$.

D'où $P\left(\left[x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}$

6/ Le terme "au hasard" est vague. Si l'on admet que le terme "au hasard" signifie "selon une loi uniforme" il faut encore préciser sur quel domaine. S'il s'agit d'une partie de $\mathbb{R}^2$ d'aire finie non nulle , on peut "convenir" que la loi uniforme sur le domaine est le rapport des aires (2$^{\text{ème}}$ solution).
Etudier le modèle probabiliste conduisant à la 1$^{\text{ère}}$ solution n'est pas sans intérêt mais il est clair que les deux modèles ne donnent pas la même solution.
Autre question : si l'on tient une fléchette en aplomb du centre du disque et qu'on lâche cette fléchette, quel est le "meilleur" modèle ? (meilleur dans le sens où la solution fournie par le modèle est la plus proche de la fréquence de succès).

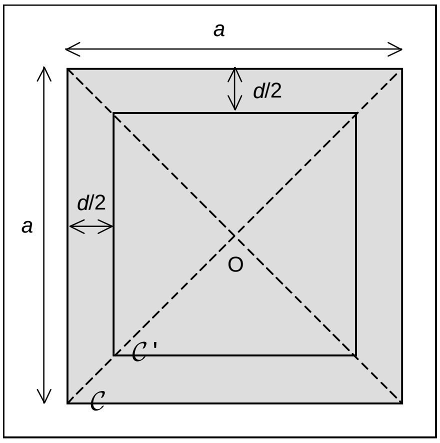
7/ Jeu de Franc-Carreau

Soit $\mathcal{C}$ un carré de côté a et $\mathrm{M}(x,y)$ le point d'impact du centre de la pièce de monnaie de diamètre d.

Si $d \geq a$, la probabilité que la pièce soit à franc-carreau est nulle. Aussi on suppose $d < a$.

On suppose que (x,y) est un couple de v.a.r. suivant une loi uniforme sur $\mathcal{C}$.

L'événement E : "la pièce de monnaie est à franc-carreau" est réalisé si (et seulement si) M appartient à un carré $\mathcal{C}'$ de côté $a-d$ de même centre (point d'intersection des diagonales) que $\mathcal{C}$.



La probabilité cherchée est donc :

$$P(E) = \frac{\text{aire}(\mathcal{C}')}{\text{aire}(\mathcal{C})} = \frac{(a-d)^2}{a^2} = \left(1-\frac{d}{a}\right)^2$$

$$P(E) = \left(1-\frac{d}{a}\right)^2$$

8/ L'aiguille de Buffon

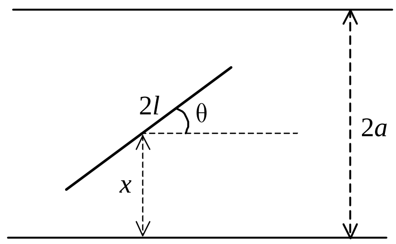
"Le milieu de l'aiguille tombe "au hasard" entre deux rainures de plancher".

Comment modéliser ce hasard là alors que le domaine de $\mathbb{R}^2$ n'est pas borné ?

Un modèle est proposé suite au texte.

On note E l'événement "l'aiguille coupe l'une des rainures du plancher".

L'événement E est réalisé si et seulement si $\left[x \leq l\sin(\theta)\right]$



$$P(E) = \frac{1}{\pi a}\int_{\Delta} dx\, d\theta$$

avec $\Delta = \left\{(x,0) \in [0,a] \times [0,\pi[\ ;\ x \leq l\sin\theta\right\}$ d'où :

$$P(E) = \frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{l\sin\theta} dx\right)d\theta = \frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi} l\sin\theta\, d\theta = \frac{2l}{\pi a}.$$

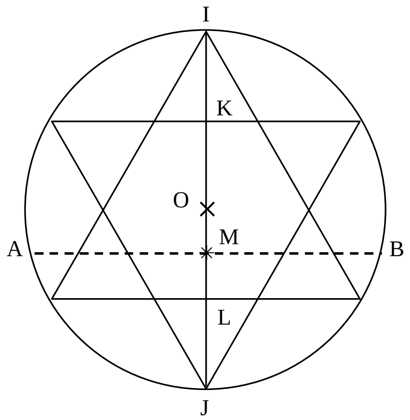
Dans le cas particulier où la longueur de l'aiguille est égale à la moitié de la largeur du plancher $\left(l = \frac{a}{2}\right)$, alors la probabilité que l'aiguille coupe l'une des rainures du plancher est $\frac{1}{\pi}$!

9/ La corde de Bertrand

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R et $[A,B]$ une corde dont on note M le milieu. Le côté de tout triangle équilatéral inscrit est de longueur $\sqrt{3}R$ On note E l'événement "la longueur de la corde est supérieure à $\sqrt{3}R$ ".

<u>*1ère solution*</u>

Pour des raisons de symétrie on se fixe la direction de la corde et on note I et J les extrémités du diamètre perpendiculaire à la corde.
On trace le triangle équilatéral inscrit de sommet I (resp. J) et on note L (resp. K) le point d'intersection avec $[IJ]$ du côté opposé à I (resp. J).

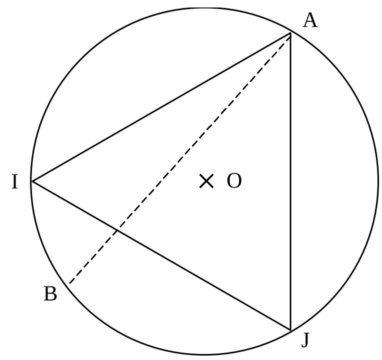


La corde $[AB]$ est complètement déterminée par son milieu M. On suppose que M est choisi selon une loi uniforme sur le segment $[IJ]$.
L'événement E est réalisé si et seulement si M appartient au segment $[KL]$ (de longueur R).

On a alors : $P(E)=\dfrac{R}{2R}=\dfrac{1}{2}$.

<u>*2ème solution*</u>

Pour des raisons de symétrie on se fixe l'extrémité A de la corde $[AB]$. On trace le triangle équilatéral inscrit AIJ de sommet A.

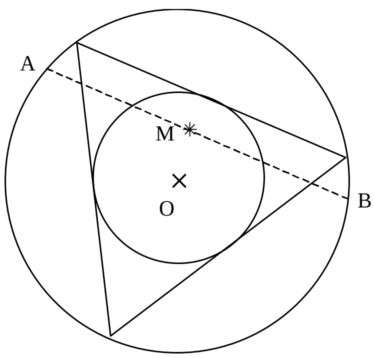


La corde $[AB]$ est complètement déterminée par sa deuxième extrémité B.
On suppose que le point B est choisi suivant une loi uniforme sur le cercle.
L'événement E est réalisé si et seulement si B appartient au petit arc de cercle IJ (de longueur $\dfrac{2\pi}{3}$).

On a alors : $P(E)=\dfrac{2\pi/3}{2\pi}=\dfrac{1}{3}$.

<u>*3ème solution*</u>

Un point M du disque de centre O et de rayon R détermine une unique corde $[AB]$ du cercle dont M est le milieu.
On suppose que M est choisi suivant une loi uniforme sur le disque de centre O et de rayon R (rapport des aires).
Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O et de rayon $R/2$; il s'agit d'un cercle inscrit dans n'importe quel triangle équilatéral inscrit lui-même dans $\mathcal{C}$.



L'événement E est réalisé si et seulement si M appartient au disque de centre O et de rayon $R/2$ (d'aire $\dfrac{2\pi R^2}{4}$).

On a alors $P(E)=\dfrac{\pi R^2/4}{\pi R^2}=\dfrac{1}{4}$

Commentaires

Comme le dit Emile Borel, dans cet exercice il n'existe pas une bonne solution. Il s'agit de préciser ce que l'on entend par "choisir une corde au hasard". Une corde est complètement déterminée par son milieu ; en utilisant des coordonnées polaires, l'ensemble des milieux est le disque de centre O et de rayon *R*.

$$\mathcal{D}_R = \left\{ re^{i\gamma} ; r \in [0, R[, \gamma \in [0, 2\pi[\right\}$$

et l'ensemble des milieux qui satisfont à l'événement E est le disque de centre O et de rayon $R/2$

$$\mathcal{D}_{\frac{R}{2}} = \left\{ re^{i\gamma} ; r \in \left[0, \frac{R}{2}\right[, \gamma \in [0, 2\pi[\right\}$$

Si le milieu *M* est choisi selon une loi uniforme sur $\mathcal{D}_R$ (rapport des aires) alors la probabilité cherchée est $\frac{1}{4}$, c'est la 3ème solution.

Si le milieu *M* est choisi selon deux lois uniformes sur $[0, R[$ et $[0, 2\pi[$ indépendantes en probabilité, alors la probabilité cherchée est $\frac{1}{2}$, c'est la 1ère solution. On retrouve ici le paradoxe rencontré en 6/.

Une corde est aussi complètement déterminée par ses extrémités *A* et *B*. Si l'on choisit chaque extrémité indépendamment l'une de l'autre et selon une loi uniforme sur le cercle, alors chaque corde est déterminée exactement deux fois et on se ramène à la 2ème solution.

Autre question

Si l'on tient une règle homogène de longueur supérieure à 2*R* par son milieu placée en aplomb du centre O d'un cercle de rayon *R* et qu'on lâche cette règle, quel est le "meilleur" modèle pour répondre à la question ? ("meilleur" dans le sens où la solution fournie par le modèle est la plus proche de la fréquence de succès).

Pour résumer, ou bien on se place dans un cadre purement mathématique et on précise l'espace probabilisé utilisé, ou bien on cherche à modéliser une expérience aléatoire dont on note les conditions de réalisation et la fréquence de réalisation lors d'expériences successives réalisées dans les mêmes conditions.