SIMULATION ET ÉCHANTILLONNAGE

De « nouveaux » programmes au lycée ont été mis en place à la rentrée 2000 en seconde, 2001 en première et 2002 en terminale. Pour la statistique et les probabilités, l'approche choisie met l'accent sur la simulation en seconde avant d'aborder la notion de probabilité en première. Comme la simulation repose sur des lois de probabilités uniformes, la démarche n'est pas évidente. L'introduction aux probabilités en troisième à partir d'exemples simples depuis la rentrée 2008 devrait atténuer les difficultés. La réécriture des programmes de seconde (rentrée 2009) recentre la fluctuation d'échantillonnage sur les notions d'intervalle de fluctuation à 95% et intervalle de confiance à 95%.
Dans le premier paragraphe, on indique comment utiliser le générateur pseudo-aléatoire de la calculatrice et on propose de justifier quelques résultats couramment utilisés.
Dans le deuxième paragraphe, on présente les notions à introduire en seconde. Ce deuxième paragraphe renvoie aux paragraphes suivants.

1) Utilisations de la touche "random" et justifications.

1. Nombres au hasard selon la loi uniforme continue sur l'intervalle $[0, 1[$

Les calculatrices possèdent un générateur de nombres "pseudo-aléatoires" (touche notée "random", ou "rand", ou "alea", …) ; "pseudo-aléatoires" car il s'agit d'un programme déterministe produisant des suites périodiques dont la période est tellement longue que les nombres générés peuvent être considérés comme des observations de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur [0, 1[(ou [0, 1] puisque la probabilité de 1 est nulle). Les nombres ainsi générés sont appelés "nombres au hasard".
Grâce à la touche "randseed" suivie d'un nombre entier (fixé arbitrairement), il est possible d'initialiser la suite périodique pour obtenir la même série de "nombres au hasard".

2. Nombres au hasard selon la loi uniforme discrète sur $[\![0, 9]\!]$

Proposition. Chacune des décimales des nombres au hasard selon la loi uniforme continue sur [0, 1[suit une loi uniforme discrète sur $[\![0, 9]\!]$.

Commentaire. On peut donc utiliser le générateur de "nombres pseudo-aléatoires" selon la loi uniforme continue sur l'intervalle [0, 1[pour générer des "nombres pseudo-aléatoires" selon la loi uniforme discrète sur $[\![0, 9]\!]$.

Preuve
1) Soit U une v.a.r. de loi uniforme continue sur $[0,1[$, montrons tout d'abord que $10U$ suit une loi uniforme continue sur $[0,10[$, que $[10U]$ (partie entière de $10U$) suit une loi uniforme discrète sur $[\![0, 9]\!]$ et que $10U - [10U]$ suit une loi uniforme continue sur $[0,1[$.
La v.a.r. $10U$ est à valeurs dans $[0,10[$ et pour tout x de $[0,10[$, on a :

$$P(10\,U \le x) = P(U \le \frac{x}{10}) = \frac{x}{10} \text{ car } \frac{x}{10} \in [0,1[\text{, d'où le premier résultat.}$$

La v.a.r. $[10U]$ est à valeurs dans $[\![0, 9]\!]$ et pour tout k de $[\![0, 9]\!]$, on a :

$P([10\,U]=k)=P(k\le 10U<k+1)=P(\frac{k}{10}\le U<\frac{k+1}{10})=\frac{1}{10}$, d'où le second résultat.

Enfin, la v.a.r. $10U-[10U]$ est à valeurs dans $[0,1[$ et pour tout y de $[0,1[$ on a :

$P(10U-[10U]\le y)=P(\bigcup_{k=0}^{9}[k<10U\le k+y])=\sum_{k=0}^{9}P(\frac{k}{10}<U\le\frac{k+y}{10})=\sum_{k=0}^{9}\frac{y}{10}=y$ et le troisième résultat.

2) On montre de la même manière que, si U est une v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1[$ et n un entier strictement positif, alors $nU\sim U_{[0,n[}$, $[nU]\sim U_{[\![0,n-1]\!]}$ et $nU-[nU]\sim U_{[0,1[}$.

3) Soit u un élément de [0, 1[et $u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ son développement décimal.

Si on note $D_k(u)$ la $k^{\text{ème}}$ décimale de u, on a alors $a_1=D_1(u)$ et, pour $k\ge 2$,

$a_k=D_k(u)=D_1\left(10^{k-1}u-\left[10^{k-1}u\right]\right)$ (en effet $10^{k-1}u=a_1 10^{k-1}+\ldots+a_{k-1}+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{10^{n-k+1}}$

donc $10^{k-1}u-\left[10^{k-1}u\right]=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{10^{n-k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+k-1}}{10^n}$ et $a_k=D_1\left(10^{k-1}u-\left[10^{k-1}u\right]\right)$).

On a montré précédemment que, si U suit une loi uniforme continue sur [0, 1[, alors $10^{k-1}u-\left[10^{k-1}u\right]$ suit une loi uniforme continue sur [0, 1[et $D_1(U)$ une loi uniforme discrète sur $[\![0,9]\!]$. Comme on a, pour tout entier naturel non nul k, $D_k(U)=D_1\left(10^{k-1}U-\left[10^{k-1}U\right]\right)$, on en déduit que chacune des décimales de U suit une loi uniforme discrète sur $[\![0,9]\!]$.

3. Nombres au hasard selon la loi uniforme discrète sur $[\![0,99]\!]$, sur $[\![0,999]\!]$, …

Proposition. Si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![0,9]\!]$, alors $10U_2+U_1$ suit une loi uniforme discrète sur $[\![0,99]\!]$, $100U_3+10U_2+U_1$ suit une loi uniforme discrète sur $[\![0,999]\!]$, et, plus généralement, $\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}U_k \sim U_{[\![0,10^n-1]\!]}$.

Preuve du premier résultat

Soit k un entier de $[\![0,99]\!]$, il existe un unique couple (k_1,k_2) de $[\![0,9]\!]^2$ tel que $k=10k_2+k_1$

$P([10U_2+U_1=k])=P([U_2=k_2]\cap[U_1=k_1])=P([U_2=k_2])P([U_1=k_1])=\frac{1}{100}$ car les v.a.r. U_1 et U_2 sont indépendantes, …

Remarques

1) On peut tester (avec un test statistique du Khi2 d'adéquation à une loi uniforme discrète) qu'une "table de nombres au hasard" fournit bien des nombres selon une loi uniforme discrète sur $[\![0,9]\!]$. Ceci n'est pas suffisant car les nombres d'une "table de nombres au hasard" sont supposés de plus provenir de v.a.r. indépendantes. On peut alors tester successivement que les nombres formés par le regroupement de 2 chiffres (resp. 3 chiffres, …) sont répartis uniformément sur $[\![0,99]\!]$ (resp. sur $[\![0,999]\!]$, …) avant de conclure. Il s'agit de la propriété de 2-uniformité (resp. 3-uniformité, …).

Ainsi, la suite périodique 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 répétée 10 fois, bien que présentant une distribution uniforme sur $[\![0, 9]\!]$, ne serait pas acceptée comme provenant de v.a.r. indépendantes et de loi uniforme sur $[\![0, 9]\!]$ car elle n'est manifestement pas 2-uniforme.

2) Les décimales d'un nombre rationnel compris entre 0 et 1 forment à partir d'un certain rang une suite périodique mais l'ensemble des nombres rationnels est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Aussi la probabilité qu'un nombre choisi au hasard selon la loi uniforme continue sur [0, 1[soit rationnel est nulle. Ceci pour la théorie car, dans la pratique, c'est bien avec des nombres décimaux donc rationnels que l'on simule la loi uniforme continue sur [0, 1].

3) Vocabulaire
Le mot "aléatoire" a plusieurs significations.
Dans le langage courant, un événement aléatoire est un événement imprévisible.
En probabilité, il s'agit d'un événement lié à un espace probabilisé. Si on lance 10 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée, les 2^{10} éléments de $\{P,F\}^{10}$ ont la même probabilité d'apparaître.
Pourtant, selon le sens présenté en (1) (développé en théorie de l'information), le résultat (P,F,F,F,P,P,F,P,P,F) sera considéré comme "plus aléatoire" que (P,P,P,P,P,P,P,P,P,P) ou (P,F,P,F,P,F,P,F,P,F).

4. Simulation de lois de probabilité conditionnelles

A partir d'une table de chiffres au hasard (selon la loi uniforme sur $[\![0, 9]\!]$) il est possible de simuler des nombres au hasard selon la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, $[\![1, 23]\!]$ ou $[\![1, 365]\!]$ (par exemple).

Procédure et justification
Pour la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, on prend les chiffres 1 à 1 et on ne conserve que ceux compris entre 1 et 6.
Pour la loi uniforme sur $[\![1, 23]\!]$, on regroupe les chiffres 2 par 2 et on ne conserve que les nombres ainsi formés compris entre 1 et 23.
Pour la loi uniforme sur $[\![1, 365]\!]$, on regroupe les chiffres 3 par 3 et on ne conserve que les nombres ainsi formés compris entre 1 et 365.

La justification vient du fait que si *P* est une loi uniforme sur un ensemble fini Ω de cardinal *n* et *A* un sous-ensemble de Ω de cardinal *k* $(0 < k < n)$ alors la probabilité conditionnelle P_A vérifie : $\forall \omega \in A,\ P_A(\{\omega\}) = \dfrac{1}{k}$ ce qui permet de simuler la loi uniforme sur *A*.

Exercice
1) Comment simuler une loi uniforme sur $[\![1, 7]\!]$ avec un dé équilibré ?
2) Comment simuler une loi uniforme sur $[\![1, 365]\!]$ avec deux urnes, l'une contenant 12 boules numérotées de 1 à 12 et l'autre 31 boules numérotées de 1 à 31 ?

5. Utilisation de la fonction de répartition
Il est possible à partir de la loi uniforme sur [0, 1[de générer n'importe quelle autre loi de probabilité en utilisant la fonction de répartition de la loi à générer.

Cas d'une v.a.r. à densité
Soit *X* une v.a.r. à densité dont le support de la distribution est un intervalle ouvert *I* de $\mathbb{R}$. Sa fonction de répartition *F* est alors une fonction continue strictement croissante sur *I* et définit une bijection de *I* sur]0, 1[.

On pose : $Y = F^{-1}(U)$. On montre que la v.a.r. Y a même loi de probabilité que *X*.
En effet : $\forall y \in \mathbb{R}, P(Y \le y) = P(U \le F(y)) = F(y)$. La fonction de répartition de *Y* est donc égale à celle de *X*.
Pour la simulation, on utilise le générateur de la loi uniforme sur [0, 1[.

À chaque observation *u* on associe $x = F^{-1}(u)$, observation selon la loi de probabilité de *X*.
Remarque : cette procédure suppose qu'il est possible d'obtenir une expression analytique de la bijection réciproque, ce qui n'est pas le cas d'un loi normale centrée réduite, par exemple. Pour simuler cette loi, on utilisera des fonctions de v.a.r. i.i.d. uniforme sur [0, 1[(cf. § 6).

Cas d'une variable discrète finie
Soit *X* une v.a.r. discrète finie, $\{(x_i, p_i) ; i = 1,..., r\}$ sa distribution de probabilité, avec $x_1 < ... < x_r$ et $p_i > 0, \sum p_i = 1$.
On définit une v.a.r *Y* à partir d'une v.a.r. *U* de loi uniforme continue sur]0, 1[de la manière suivante : $Y = \sum_{i=1}^{r} x_i \mathbb{I}_{[P_{i-1} \le U < P_i]}$, avec $P_0 = 0$ et $P_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$.
Il est facile de vérifier que la v.a.r. *Y* a même loi de probabilité que *X*.

Pour la simulation, on utilise le générateur de la loi uniforme sur [0, 1[, on construit la partition $\{[P_{i-1}, P_i[\; ; i = 1,..., r\}$ de [0, 1[et à une observation *u* de *U* on associe la valeur x_{i_0} si $P_{i_0 - 1} \le u < P_{i_0}$. On utilise en fait une fonction réciproque généralisée de la f.d.r. (non bijective) F de *X*, appelée *fonction quantile*.

Commentaire. Pour les lois discrètes usuelles, on utilisera de préférence des fonctions d'une v.a.r. *U* uniforme sur [0, 1[ou de plusieurs v.a.r. i.i.d. comme *U* (cf. § 6).

6. Simulation des lois de probabilités usuelles
Soit $U \sim U_{[0,1[}$, simulation de

- la loi uniforme sur un intervalle [*a*, *b*] de $\mathbb{R}$: $a + (b-a)U$
- la loi de Bernoulli de paramètre p $(p \in]0,1[)$: $[U + p]$
- la loi géométrique de paramètre p $(p \in]0,1[)$: $[\ln(U)/\ln(1-p)] + 1$
- la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$: $-\ln(U)/\lambda$

Soit $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ indépendantes et uniformes sur $[0,1[$, simulation de

- la loi binomiale de paramètres *n* et *p* $(n \in \mathbb{N}_*$ et $p \in]0,1[)$: $\sum_{i=1}^{n} [U_i + p]$
- la loi de Poisson de paramètre λ $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$: $\min\left\{n \in \mathbb{N}_*, \prod_{i=1}^{n} U_i \le e^{-\lambda}\right\} - 1$

Pour les lois normales, exercice préliminaire sur la loi normale à deux dimensions (coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires)

Soit *M* un point du plan rapporté à un repère orthonormé,
de coordonnées polaires (r, θ), $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi[$, et

de coordonnées cartésiennes (x, y), $x = r\cos(\theta) \in \mathbb{R}$, $y = r\sin(\theta) \in \mathbb{R}$.
On suppose que X et Y sont des v.a.r. de lois normales centrées réduites et indépendantes en probabilité. Montrer que la densité de (R, Θ) est alors : $g(r,\theta) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r \mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(r)$.
En déduire que R et Θ sont des v.a.r. indépendantes à densité et écrire leur densité de probabilité.
Soit U et V deux v.a.r. de lois uniformes sur l'intervalle [0, 1] et indépendantes en probabilité.
Montrer que $\sqrt{-2\ln(U)}$ et $2\pi V$ sont indépendantes en probabilité et que
$X = \sqrt{-2\ln(U)}\,\cos(2\pi V)$ est une v.a.r. de loi normale centrée réduite.
Que conclure sur la loi de probabilité de la v.a.r. $Y = \sqrt{-2\ln(U)}\,\sin(2\pi V)$ et sur l'indépendance en probabilité de X et Y ?

Simulation de
- la loi normale centrée réduite (en utilisant les résultats de l'exercice préliminaire)
$\sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)$, avec U, V indépendantes et uniformes sur $[0,1[$ (loi exacte) ou
$\sum_{i=1}^{12} U_i - 6$, avec $(U_i)_{i=1,\dots 12}$ indépendantes et uniformes sur $[0,1[$ (loi approchée).
- la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ ($\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$) : $\sigma X + \mu$, $X \sim N(0,1)$

2) Définition et objectif de la simulation

« Formellement, simuler une expérience, c'est choisir un modèle de cette expérience puis simuler ce modèle » (document d'accompagnement du programme de 2^{nde}).
La simulation consiste à construire un échantillon de valeurs $x_1, \dots, x_k$ qui puissent être considérées comme des observations de variables aléatoires (v.a.) $X_1, \dots, X_k$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) comme une v.a. X, la distribution de probabilité de X étant connue. On parlera donc du nombre k de simulations.
L'objectif de la simulation est d'obtenir une « approximation » de la distribution de probabilité (et donc, en particulier, de l'espérance mathématique, de la variance, …) d'une variable Y fonction de X (ou fonction de $X_1, \dots, X_n$ suite de n v.a.r. i.i.d. comme X) qu'il serait difficile d'obtenir par un calcul formel. On remplace le calcul formel par du calcul numérique, la simulation consiste à produire les données adéquates. (Cf. § 3.).
Bien souvent, on utilisera la simulation pour l'approximation des distributions de probabilité de *variables dites d'échantillonnage* car calculées sur un échantillon de taille n (fréquence d'échantillonnage, moyenne d'échantillonnage, variance d'échantillonnage) ; dans ce cas là, il faudra fournir $k \times n$ observations afin d'avoir k simulations d'un échantillon de taille n. On mettra en évidence la fluctuation d'échantillonnage (variabilité des fréquences d'un échantillon de taille n à un autre échantillon de taille n) et stabilisation (diminution de la variabilité) lorsque la taille de l'échantillon augmente. (Cf. § 5.).
Lors de simulation, observer la fluctuation d'échantillonnage et la stabilisation des fréquences est un premier objectif du programme de seconde. A la rentrée 2009 ont été introduites les notions d'intervalle de fluctuation à 95% et d'intervalle de confiance à 95%. Nous proposons (§ 4.) quelques rappels théoriques permettant de contrôler ce qu'il est proposé d'enseigner en seconde.

3. Choix de modèles et simulations

Pour chacune des situations suivantes, après avoir proposé une procédure de simulation, on réalisera 100 simulations en utilisant la table de nombres au hasard. On utilisera les chiffres de la table, ligne par ligne, dans l'ordre où ils se présentent.
La distribution de fréquences est une approximation de la distribution de probabilités des variables aléatoires considérées. On présentera ces deux distributions dans un même tableau.

3.1/ On lance deux fois un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse à la différence entre le maximum et le minimum des points marqués.

3.2/ On lance simultanément deux dés équilibrés indiscernables dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse à la somme des points marqués. *(Commentaire : la simulation ne remplace pas la modélisation).*

3.3/ On s'intéresse aux conséquences de la politique familiale d'un pays qui imposerait de s'arrêter au premier garçon ou après quatre filles ; cette politique entraîne-t-elle un déséquilibre entre les nombres de garçons et de filles ?
Cet exemple, largement repris dans les manuels scolaires (en échangeant parfois le rôle des garçons et des filles), était proposé dans le document d'accompagnement de l'ancien programme de 2$^{\text{nde}}$. Avant d'étudier comment simuler cette expérience, il serait bon de « commenter » l'énoncé !

3.4/ Dans une série de lancers d'une pièce de monnaie, on s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile.

4. Retour sur les théorèmes limites : loi des grands nombres et théorème central limite

A. On considère une expérience aléatoire et une variable aléatoire réelle X liée à cette expérience.
Dans chacun des cas suivants, construire l'espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire, écrire la loi de probabilité de X, calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

1) On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note X l'indicatrice de l'événement « on obtient pile » (c'est-à-dire : $X = 1$ si Pile, $X = 0$ si Face).
2) On tire au hasard une boule dans une urne contenant quatre boules dont une rouge et on note X l'indicatrice de l'événement « on tire la boule rouge ».
3) On lance un dé équilibré et on note X le nombre indiqué par le dé.
4) Soit X un nombre entier tiré au hasard dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
5) On lance deux dés et on note X la somme des points marqués.
6) Soit X un nombre réel tiré au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$.
7) Soit Y un nombre réel tiré au hasard dans l'intervalle $]0, 1[$, F la fonction de répartition de la distribution normale centrée réduite et $X = F^{-1}(Y)$.

B. On répète *n* fois et indépendamment l'expérience aléatoire précédente.
Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ la variable aléatoire *X* liée à la 1ère expérience, 2ème expérience, …, *n*ème expérience, on pose $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on note $\overline{X}^n$ et V^n la moyenne et la variance de $X_1, X_2, \dots, X_n$ (appelées respectivement moyenne et variance d'échantillonnage).
Précisez les espaces sur lesquels sont définies les différentes variables aléatoires introduites.
Quelle est la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$? Calculer l'espérance de $\overline{X}^n$, la variance de $\overline{X}^n$ et l'espérance de V^n en fonction de l'espérance et de la variance de *X*. Que peut-on dire de la loi de probabilité de $\overline{X}^n$?
Préciser les réponses dans chacun des cas 1) à 7) précédents.

5. Simulation, fluctuation d'échantillonnage, intervalle de confiance

A. Épreuve aléatoire
On lance un dé équilibré dont les six faces portent les nombres entiers de 1 à 6.
La distribution de probabilité (ou distribution des fréquences théoriques) de sortie de ces six nombres est (1/6, …, 1/6), l'espérance mathématique μ (resp. la variance σ^2) de la variable aléatoire réelle *X* uniforme sur {1, … ,6} est égale à 7/2 (resp. 35/12).
Parallèlement, si l'on convient de dire que la sortie de 1, 2 ou 3 correspond au "succès", la probabilité p de "succès" est égale à 1/2.

B. Expérience aléatoire ; calculs théoriques, intervalle de fluctuation
On répète *n* fois et indépendamment l'épreuve précédente.
On note $(F_1^n, ..., F_6^n)$ la distribution des fréquences de sortie de (1, …, 6) sur l'échantillon, on note $\overline{X}^n$ et V^n la moyenne et la variance de la v.a.r. *X* sur l'échantillon et $F^n \; (= F_1^n + F_2^n + F_3^n)$ la fréquence de "succès" sur l'échantillon.
Calculer, en fonction de *n*, l'espérance mathématique et la variance des variables aléatoires d'échantillonnage : $F_k^n, k = 1, ..., 6$, $\overline{X}^n$ et F^n, ainsi que l'espérance mathématique de la v.a.r. V^n. Ces variables aléatoires sont approximativement de loi gaussienne ; préciser les paramètres de la loi et donner l'intervalle de fluctuation à 95% de ces variables aléatoires.

C. Simulation
a) n = 50
On envisage 40 simulations de l'expérience aléatoire dans le cas *n* = 50. Les relevés (notés fk, $k = 1, \dots, 6$, freq et moy) des 40 simulations ainsi qu'un tableau donnant le minimum, maximum, moyenne et écart-type des relevés de ces 40 simulations sont donnés ci-après. (La colonne gr indique le regroupement qui sera fait ensuite cf. *b.*)
b) n = 200
On envisage 10 simulations de l'expérience aléatoire dans le cas *n* = 200 (correspondant aux regroupements par 4 des résultats précédents comme indiqué par la variable gr). Les relevés (des fk, $k = 1, \dots, 6$, freq et moy) des 10 simulations ainsi qu'un tableau donnant le minimum, maximum, moyenne et écart-type des relevés de ces 10 simulations sont donnés ci-après.
c) n = 2000
On envisage une seule expérience aléatoire dans le cas *n* = 2000 (correspondant au regroupement des 40 échantillons de taille 50 et donc aussi des 10 échantillons de taille 200).

Donner la moyenne de chacune des variables $F_k^n, k = 1,...,6$, $\overline{X}^n$ et F^n sur l'échantillon simulé de taille 2000. Commenter les résultats présentés ci-après en fonction des résultats théoriques obtenus précédemment.

D. Estimation par intervalle de confiance

On lance un dé. Sur un échantillon de taille 400 on a observé une fréquence de succès (le succès consiste à obtenir le 1, le 2 ou le 3) de 0.56. On note *p* la probabilité de succès avec ce dé. Estimer *p* par intervalle de confiance à 95%.

Relevés des 40 simulations de taille 50

GR	F1	F2	F3	F4	F5	F6	FREQ	MOY
1	.140	.200	.120	.160	.160	.220	.460	3.660
1	.060	.200	.180	.160	.240	.160	.440	3.800
1	.180	.240	.160	.200	.140	.080	.580	3.120
1	.120	.160	.160	.100	.240	.220	.440	3.840
2	.220	.120	.120	.200	.160	.180	.460	3.500
2	.160	.100	.180	.180	.140	.240	.440	3.760
2	.200	.140	.100	.160	.300	.100	.440	3.520
2	.060	.220	.320	.200	.100	.100	.600	3.360
3	.140	.260	.160	.240	.100	.100	.560	3.200
3	.140	.180	.220	.180	.140	.140	.540	3.420
3	.160	.100	.180	.220	.160	.180	.440	3.660
3	.140	.180	.200	.160	.200	.120	.520	3.460
4	.160	.160	.220	.140	.140	.180	.540	3.480
4	.120	.100	.260	.140	.200	.180	.480	3.740
4	.180	.200	.180	.160	.140	.140	.560	3.300
4	.060	.220	.120	.180	.140	.280	.400	3.960
5	.160	.160	.080	.180	.240	.180	.400	3.720
5	.240	.180	.080	.100	.140	.260	.500	3.500
5	.100	.240	.200	.100	.180	.180	.540	3.560
5	.240	.100	.180	.140	.180	.160	.520	3.400
6	.180	.160	.180	.080	.220	.180	.520	3.540
6	.240	.160	.160	.100	.220	.120	.560	3.260
6	.240	.160	.100	.160	.240	.100	.500	3.300
6	.200	.200	.120	.100	.240	.140	.520	3.400
7	.180	.240	.120	.140	.140	.180	.540	3.360
7	.280	.160	.160	.100	.160	.140	.600	3.120
7	.140	.140	.240	.140	.140	.200	.520	3.600
7	.260	.180	.140	.180	.140	.100	.580	3.060
8	.120	.180	.200	.220	.100	.180	.500	3.540
8	.140	.220	.080	.260	.140	.160	.440	3.520
8	.180	.180	.080	.200	.200	.160	.440	3.540
8	.240	.200	.140	.140	.140	.140	.580	3.160
9	.200	.160	.160	.100	.200	.180	.520	3.480
9	.220	.180	.200	.020	.260	.120	.600	3.280
9	.200	.140	.120	.200	.140	.200	.460	3.540
9	.220	.160	.200	.120	.180	.120	.580	3.240
10	.160	.200	.220	.140	.160	.120	.580	3.300
10	.280	.100	.180	.120	.160	.160	.560	3.260
10	.160	.220	.320	.080	.160	.060	.700	3.040
10	.120	.300	.200	.100	.100	.180	.620	3.300

Résumés statistiques des 40 simulations

	N	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type
F1	40	.060	.280	.17350	.056639
F2	40	.100	.300	.17750	.046451
F3	40	.080	.320	.16850	.057981
F4	40	.020	.260	.15000	.049820
F5	40	.100	.300	.17200	.048102
F6	40	.060	.280	.15850	.048014
FREQ	40	.400	.700	.51950	.066946
MOY	40	3.040	3.960	3.44500	.220756

Relevés des 10 simulations de taille 200

GR	F1	F2	F3	F4	F5	F6	FREQ	MOY
1	.125	.200	.155	.155	.195	.170	.480	3.605
2	.160	.145	.180	.185	.175	.155	.485	3.535
3	.145	.180	.190	.200	.150	.135	.515	3.435
4	.130	.170	.195	.155	.155	.195	.495	3.620
5	.185	.170	.135	.130	.185	.195	.490	3.545
6	.215	.170	.140	.110	.230	.135	.525	3.375
7	.215	.180	.165	.140	.145	.155	.560	3.285
8	.170	.195	.125	.205	.145	.160	.490	3.440
9	.210	.160	.170	.110	.195	.155	.540	3.385
10	.180	.205	.230	.110	.145	.130	.615	3.225

Résumés statistiques des 10 simulations

	N	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type
F1	10	.125	.215	.17350	.033669
F2	10	.145	.205	.17750	.018597
F3	10	.125	.230	.16850	.031802
F4	10	.110	.205	.15000	.036667
F5	10	.145	.230	.17200	.028983
F6	10	.130	.195	.15850	.022979
FREQ	10	.480	.615	.51950	.042587
MOY	10	3.225	3.620	3.44500	.132056