Loi de Poisson

1. Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. La loi de probabilité de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, est définie sur ℕ par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

2. Propriétés

1/ Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a : $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

2/ Fonction génératrice des moments :

$$\forall t \in]-1,1[,\ g_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k p_k = e^{\lambda(t-1)}$$

3/ Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, $(\lambda_1,\lambda_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, X_1 et X_2 indépendantes en probabilité, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

4/ Si une loi de probabilité sur ℕ vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_{k+1} = \frac{\lambda}{(k+1)} p_k, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

alors il s'agit d'une loi de probabilité de Poisson de paramètre λ.

5/ Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, alors la suite de v.a.r. (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Preuve 1.

Si on pose $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq k$: $p_{k,n} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$, alors on vérifie aisément :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } n \geq \max(k,\lambda) :\ p_{k+1,n} = \frac{(n-k)\lambda}{(k+1)(n-k)} p_{k,n}.$$

Comme, pour k fixé, la suite $\left(\frac{(n-k)\lambda}{(k+1)(n-\lambda)}\right)_{n>\max(k,\lambda)}$ est convergente de limite $\frac{\lambda}{k+1}$, on en déduit que, si la suite $\left(p_{k,n}\right)_{n>\max(k,\lambda)}$ est convergente de limite p_k, alors la suite $\left(p_{k+1,n}\right)_{n>\max(k,\lambda)}$ est convergente de limite $p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k$.

Il suffit de vérifier que la suite de terme général $p_{0,n}$ converge pour avoir montré par récurrence qu'il en est de même, pour tout k de ℕ, de la suite $\left(p_{k,n}\right)_{n>\max(k,\lambda)}$.

Comme on a : $p_{0,n}=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$, la suite $\left(p_{0,n}\right)_{n>0}$ converge et a pour limite $e^{-\lambda}$. La loi limite vérifiant : $\forall k\in\mathbb{N},\ p_{k+1}=\frac{\lambda}{k+1}p_k$, il s'agit de la loi de Poisson de paramètre λ. (Cf. document d'accompagnement des programmes de Terminales).

Preuve 2.

Soit $\forall k\in\mathbb{N}$. On a, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n>\max(k,\lambda)$:

$$p(X_n=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

et il est aisé de vérifier que le dernier membre converge vers $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Preuve 3.

Utilisation des fonctions génératrices des moments.
Si $X_n\sim\mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$, on a :

$$\forall t\in[-1,1]\quad G_{X_n}(t)=\left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}t\right)^n=\left(1+\frac{\lambda(t-1)}{n}\right)^n$$

et

$$\lim_{n\to\infty}G_{X_n}(t)=e^{\lambda(t-1)}=G_X(t)\ \text{ avec }\ X\sim\mathcal{P}(\lambda).$$

3. Applications

Soit X le nombre d'arrivées de clients sur un intervalle de temps que l'on peut noter $[0,1]$. On suppose qu'il y a en moyenne λ arrivées ($\lambda>0$) sur cet intervalle de temps. On peut considérer alors que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Justification.
On divise l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de longueur $1/n$ et on fait les deux hypothèses suivantes :
1/ Il existe au plus une arrivée par intervalle de temps de longueur $1/n$ et
2/ les arrivées sont indépendantes les unes des autres.

Soit X_i la v.a. égale à 1 s'il y a une arrivée dans le i-ème intervalle, égale à 0 sinon, $(X_1,\ldots,X_n)$ est un n-uplet de v.a.r. i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) de loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et on en déduit que la somme, $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$.
Lorsque n tend vers l'infini, la loi de X converge vers une loi de Poisson de paramètre λ.

4. Exercices

1/ Contrôle de fabrication.
Une chaîne produit des boulons avec une proportion de 1/1000 de boulons défectueux.
Quelle est la probabilité de trouver au moins 2 boulons défectueux dans un lot de 500 ?

2/ Correction d'ouvrage
Dans un livre de 500 pages, il y a 50 coquilles réparties au hasard.
Quelle est la probabilité de trouver strictement plus d'une coquille dans une page donnée ?
Soit Y le nombre de pages contenant plus d'une coquille. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

3/ Dans une grande ville il y a en moyenne deux incendies par an.
Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'incendie dans l'année à venir ?

4/ « Surbooking ».
Sachant que 1% des réservations pour un vol donné ne sont pas utilisées, une compagnie aérienne vend 75 billets pour 73 places.
Quelle est la probabilité que tous les passagers aient une place ?

5/ Le cake aux raisins.
Combien faut-il mettre de raisins secs dans la pâte à cake pour que la probabilité de trouver au moins un raison sec dans un morceau de cake (un vingtième du cake) soit supérieure ou égale à 95% ?

Loi de Poisson – Corrections des exercices

1/ Contrôle de fabrication

On fait les hypothèses (i) pour chaque boulon tiré au hasard dans l'ensemble de la production, la probabilité d'être défectueux est 1/1000 et (ii) les boulons sont défectueux indépendamment les uns des autres.
Soit X le nombre de boulons défectueux dans un lot de 500 boulons tirés au hasard de la production.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 1/1000$, qui peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.5$. La probabilité de l'événement « 2 boulons au moins sont défectueux » est :

$$P([X \geq 2]) = 1 - P([X = 0]) - P([X = 1]) = 1 - e^{-0.5} - 0.5e^{-0.5} \simeq 0.09$$

2/ Correction d'ouvrages

Soit X le nombre de coquilles d'une page donnée ; X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.1$ (même raisonnement que précédemment : chaque coquille a une probabilité de 1/500 d'être dans la page, indépendamment des autres coquilles, le nombre X de coquilles dans la page suit une loi binomiale $\mathcal{B}(50;1/500)$, approchée par une loi $\mathcal{P}(0.1)$).
La probabilité de trouver strictement plus d'une coquille dans une page donnée est :

$$P(X > 1) \simeq 0.00468 .$$

Soit Y le nombre de pages ayant plus d'une coquille. On suppose que, pour chaque page, la probabilité d'avoir plus d'une coquille est 0.00468, ceci indépendamment des autres pages.
On a donc $Y \sim \mathcal{B}(500;0.00468)$ loi qui peut être approchée par la loi $\mathcal{P}(2.34)$, les deux lois ayant pour espérance mathématique 2.34.
Le nombre de pages ayant plus d'une coquille est en moyenne 2.34.

3/ On peut considérer que le nombre X d'incendies dans une année donnée suit une loi de Poisson de paramètre 2. La probabilité de ne pas avoir d'incendie dans l'année à venir est alors :

$$P([X=0]) = e^{-2} = 0.135.$$

4/ Surbooking

On suppose que chaque billet a la probabilité 0.01 de ne pas être utilisé, indépendamment des autres billets. Le nombre X de billets non utilisés parmi les 75 vendus suit une loi binomiale $\mathcal{B}(75;0.01)$ approchée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(0.75)$. La probabilité que tous les passagers aient une place est donc :

$$P(X \leq 2) \simeq 0.96 .$$

5/Le cake aux raisins

Soit n le nombre de raisins secs dans la pâte à cake. Le nombre X de raisins secs dans ma part (1/20 du cake) suit une loi de Poisson de paramètre n/20. On cherche n vérifiant :

$$P([X \geq 1]) \geq 0.95 \text{, c'est-à-dire } P([X=0]) = e^{-\frac{n}{20}} \leq 0.05.$$

Il faut mettre au moins 60 raisins secs dans la pâte à cake pour que la probabilité que je trouve au moins un raisin sec dans ma part soit supérieure à 0.95. (Attention, il ne s'agit pas de la probabilité qu'il y ait simultanément au moins un raisin sec dans chacune des 20 parts du cake).