Le singe dactylographe

Énoncé (à partir d'un texte d'Émile Borel, 1909)

Un singe tape au hasard 25 caractères de suite sur un clavier de 50 touches (correspondant aux lettres, aux chiffres et autres caractères ... blanc, de ponctuation, accentués).

1) Quelle est la probabilité qu'il écrive la phrase suivante (de 25 caractères, y compris le blanc et le point d'exclamation) ?

le hasard mène le monde !

2) Soit $N = 50^{25}$. Il répète N fois de suite dans les mêmes conditions l'expérience précédente. Quelle est la probabilité qu'il écrive au moins une fois la phrase ci-dessus ?

3) Combien de fois doit-il répéter l'expérience pour que la probabilité qu'il écrive au moins une fois la phrase ci-dessus soit supérieure ou égale à 0.999 ?

Solution

1) La probabilité qu'il écrive la phrase est $\left(\frac{1}{50}\right)^{25}$ (il faut qu'il tape 25 fois de suite le caractère correct)

2) La probabilité qu'il écrive la phrase au moins une fois sur 50^{25} expériences indépendantes est

$1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$ avec $N = 50^{25}$, soit approximativement $1 - e^{-1} (\cong 0.63)$

3) On cherche n tel que $1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \geq 0.999$ avec $N = 50^{25}$.

Si on pose $x = n / N$, cela revient à chercher x tel que $1 - e^{-x} \geq 1 - 0.001$, soit $x \geq \ln(1000) (\cong 0.63)$,

si le singe répète l'expérience 6.9 fois 50^{25} , il est quasiment sûr qu'il tapera au moins une fois la phrase "le hasard mène le monde !".

Morale de l'histoire : aussi faible soit la probabilité d'un événement attaché à une expérience, il se réalisera avec une probabilité aussi proche de 1 que l'on veut si on réalise l'expérience dans les mêmes conditions un nombre suffisant de fois.

Cet argument est utilisé dans le débat sur l'existence de la vie sur une planète hors du système solaire. Le problème est d'évaluer la probabilité qu'il y ait de la vie sur une planète et le nombre de planètes dans l'univers !