Adrien-Marie Legendre (1752-1833) publie en 1805 la méthode consistant à minimiser la somme des carrés des écarts, correspondant à l'ajustement optimal pour la structure géométrique euclidienne. Indépendamment, ***Gauss***, alors directeur de l'observatoire de Göttingen, parvient, dans le cadre de l'étude des orbites planétaires, à cette même **méthode des moindres carrés**, dit-il dès 1794 (il en conteste la paternité à *Legendre*, mais ne publiera qu'en 1809). L'originalité de *Gauss* est d'établir les liens qui existent entre cette méthode et les lois de probabilité, aboutissant à la "loi gaussienne" :

Soit une quantité θ inconnue, pour laquelle on possède plusieurs mesures x_1 , x_2, ..., x_n. On constate tout d'abord que l'estimation $\hat{\theta}$ de θ rendant minimale la somme des carrés des erreurs correspond à la moyenne : $\hat{\theta} = \bar{x} = \dfrac{x_1 + \ldots x_n}{n}$.

En effet, ce minimum sera obtenu en annulant la dérivée par rapport à $\hat{\theta}$ de la somme des carrés des écarts, soit

$\dfrac{d}{d\hat{\theta}}\sum(\hat{\theta} - x_i)^2 = 2\sum(\hat{\theta} - x_i) = 0$ qui donne $\hat{\theta} = \dfrac{x_1 + \ldots x_n}{n}$.

En envisageant la question d'un point de vue probabiliste, on considérera que les erreurs $e_1 = x_1 - \theta$, ..., $e_n = x_n - \theta$ sont des réalisations de n variables aléatoires indépendantes E_1, ..., E_n de même loi continue de densité f, dépendant de la valeur inconnue θ.

Pour θ donné, la probabilité d'effectuer des erreurs entre $e_1 + de_1$, ..., $e_n + de_n$ est alors, en vertu de l'indépendance, $f(e_1) \times \ldots \times f(e_n)\, de_1 \ldots de_n$.

On peut alors retourner le raisonnement (à la façon de *Bayes*) et se demander, les mesures x_1, ..., x_n étant connues, quelle est la valeur de θ la plus vraisemblable. C'est à dire, quelle est la valeur de θ qui rendra maximale la probabilité d'observation des mesures x_1, ..., x_n (réellement observées) donc des erreurs e_1, ...e_n. Il s'agit de rechercher θ, donc f, de sorte que $f(x_1 - \theta) \times \ldots \times f(x_n - \theta)$ soit maximum ("**maximum de vraisemblance**").

Le produit $\prod f(x_i - \theta)$ est maximum lorsque la somme $\sum \ln(f(x_i - \theta))$ est maximale.

En dérivant par rapport à θ, on obtient la condition $\sum \dfrac{d \ln f(x_i - \theta)}{d\theta} = 0$.

Sachant que la moyenne arithmétique $\hat{\theta} = \dfrac{x_1 + \ldots x_n}{n}$ correspond à la valeur recherchée de θ et que cette moyenne vérifie l'équation en θ : $\sum(x_i - \theta) = 0$, *Gauss* en déduit que, pour i allant de 1 à n, on a $\dfrac{d \ln f(x_i - \theta)}{d\theta} = k(x_i - \theta)$.

On a enfin, en intégrant, $\ln f(x_i - \theta) = -k\dfrac{(x_i - \theta)^2}{2} + \text{cte}$ soit $f(x_i - \theta) = Ce^{-\frac{k}{2}(x_i - \theta)^2}$, où l'on retrouvera l'expression de la densité de la **loi normale**.

Rétrospectivement, on constate que si $f(e_i) = Ce^{-\frac{k}{2}e_i^2}$, alors $\prod f(e_i) = Ce^{-\frac{k}{2}\sum e_i^2}$ est maximum lorsque la somme des carrés des écarts $\sum e_i^2$ est minimale.

Ainsi lorsque, lors de mesures, l'addition de plusieurs facteurs aléatoires indépendants (et sensiblement équivalents) induit des erreurs, celles-ci se répartissent selon la loi de *Gauss* et la moyenne arithmétique des mesures fournit l'estimation qui minimise la somme des carrés des erreurs.

C'est ainsi par exemple que le "cercle répétiteur" conçu par le "mathématicien marin" *Borda* et réalisé par "l'artiste mécanicien" *Lenoir* en 1787 permit un gain important de précision dans la mesure des angles et put être utilisé par *Delambre* et *Méchain* dans la mesure du méridien pour déterminer la valeur du mètre. L'appareil, muni de deux lunettes de visée, permettait, en débrayant une des lunettes du cercle, de cumuler n mesures de l'angle. En divisant la somme par n, on obtenait ainsi une mesure moyenne, pour laquelle la dispersion (l'écart type) est divisée par $\sqrt{n}$ (voir théorème limite central et échantillonnage).

Cercle répétiteur de *Borda* et *Lenoir*