

Graphe probabiliste et matrice de transition

Commentaire sur le document d'accompagnement de Terminale ES sur les graphes probabilistes (cf. p. 3 et 4)

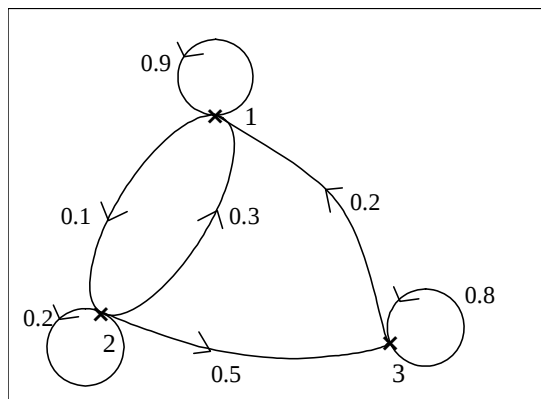
Un graphe probabiliste d'ordre n est un graphe orienté, pondéré, de poids positifs tels que la somme des poids des arêtes partant de chacun des n sommets soit égale à 1.

Soit $\mathcal{E} = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des sommets et, pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$, $m_{i,j}$ le poids de l'arête allant du sommet i vers le sommet j (on pose $m_{i,j} = 0$ s'il n'y a pas d'arête du sommet i vers le sommet j). La matrice $M = (m_{i,j})$ de dimension $n \times n$ est appelée matrice de transition du graphe probabiliste.

Elle vérifie : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$ (*).

Réciproquement, à toute matrice carrée M d'ordre n de réels positifs vérifiant (*) est associé un graphe probabiliste dont M est la matrice de transition.

Exemple : un graphe probabiliste d'ordre 3 et la matrice de transition associée.



$$M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Ces graphes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un "individu" pouvant changer aléatoirement d'état dans le temps (processus temporel indexé par $\mathbb{N}$) : les sommets du graphe représentent les états possibles et la probabilité de passer dans un état à l'instant k ne dépend que de l'état dans lequel l'individu se trouve à l'instant $k-1$ (et ne dépend pas du temps) (ce processus est appelé "chaîne de Markov"). On pose alors $m_{i,j} = p(j/i)$, probabilité sachant que l'individu est dans l'état i de passer dans l'état j .

L'état probabiliste de l'individu à l'instant k est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles : cette loi sera ici représentée par une matrice ligne $P_k = (p_k(1) \dots p_k(n))$. L'objectif est de connaître cet état pour tout instant k et d'étudier si cet état évolue vers un état stable à déterminer.

Comme d'habitude, dans les calculs sur les matrices, on convient d'identifier un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ au vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique et un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ à sa matrice carrée d'ordre n relativement à la base canonique.

Propriétés

- 1) On vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P_k = P_{k-1}M = P_0M^k$. L'état probabiliste à l'instant k ne dépend que de l'état probabiliste initial P_0 et de la matrice de transition M .
- 2) La matrice colonne $\mathbb{I}$ dont les n éléments sont égaux à 1 vérifie $M \mathbb{I} = \mathbb{I}$; il s'agit donc d'un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.
- 3) Si Q est une matrice ligne de n réels positifs de somme 1, alors QM aussi.
- 4) Si le processus converge vers un état probabiliste stable P , alors P vérifie $P = PM$ (et donc tP (matrice colonne d'ordre n) est vecteur propre de tM associé à la valeur propre 1.

5) Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, le processus converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0 .

Si on pose : $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, $a \in]0,1[$, $b \in]0,1[$,

alors on a $M = N + q R$ avec $q = 1-a-b$, $N = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} & -\frac{a}{a+b} \\ -\frac{b}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$

et ces éléments vérifient $|q| < 1$, $N^2 = N$, $R^2 = R$, $NR = RN = 0$.

On en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M = N + q^k R$, $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = N$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_0 N$.

Or, quelque soit l'état initial P_0 , on a $P_0 N = P$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$.

Le processus converge vers un état stable qui ne dépend pas de l'état initial.

L'état stable $P = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$ est le seul vecteur vérifiant $P = P M$.

Commentaires

1) Cette dernière propriété peut être généralisée à un graphe probabiliste d'ordre n . On montre que les valeurs propres complexes d'une matrice de transition M sont de module inférieur ou égal à 1 et que 1 est valeur propre. On montre de plus que, si 1 est valeur propre simple et si toutes les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, alors le processus converge vers l'unique état probabiliste P vérifiant $P = P M$.

Dans le cas particulier $n = 2$, en reprenant les notations ci-dessus, la trace de M est $2 - a - b$ et 1 est valeur propre, l'autre est donc $q (=1-a-b)$ de module strictement inférieur à 1 ; le processus converge vers un état stable (qui ne dépend que de la matrice de transition et non de l'état initial).

2) Bien souvent, l'information donnée sur l'état probabiliste initial consiste à dire que l'individu se trouve dans l'un des n états, l'état 1 par exemple. L'état probabiliste initial est alors la matrice ligne dont le premier terme est 1 et tous les autres 0. Se pose alors le problème d'appliquer la matrice M à cet état initial puisque les probabilités conditionnelles $m_{i,j} = p(j/i)$ ne peuvent être utilisées que lorsque les événements qui conditionnent sont de probabilité non nulle.

On notera que la formule des probabilités totales peut être utilisée dans un cadre élargi.

Formule des probabilités totales

Si $\{A_1, \dots, A_n\}$ forme un système complet d'événements de probabilité non nulle, alors pour tout

événement B on a : $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)$

Généralisation

Si $\{A_1, \dots, A_n\}$ forme un système complet d'événements, alors pour tout événement B on a :

$$P(B) = \sum_{i \in \{1, \dots, n; P(A_i) \neq 0\}} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in \{1, \dots, n; P(A_i) \neq 0\}} P(A_i) P_{A_i}(B)$$

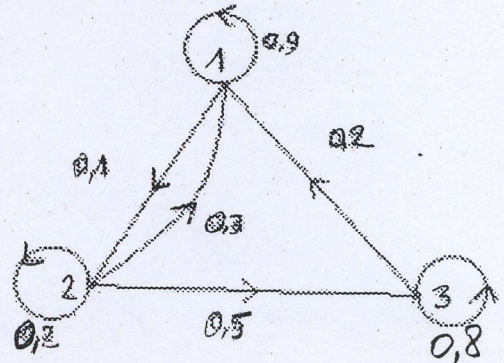
GRAPHE PROBABILISTE

ANNEXE

Document
Accompagnement
Tem ES

Un **graphe probabiliste** est un **graphe orienté**, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet donné vaut 1.

Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un individu pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets du graphe sont les états possibles de l'individu et le poids d'une arête orientée issue du sommet i , et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j . L'état probabiliste de l'individu est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles : cette loi sera ici représentée par une matrice ligne.



Un graphe probabiliste peut aussi être utilisé pour décrire l'évolution d'un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans différents états (l'ensemble des états est le même pour chaque composant). L'état du système à un instant donné est la matrice ligne donnant le nombre de composants du système dans chaque état.

La **matrice de transition d'un graphe** probabiliste d'ordre n est de dimension $n \times n$. Le terme à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne a pour valeur le poids de l'arête orientée allant de i vers j si cette arête existe, 0 sinon.

Le graphe d'ordre 3 ci-dessus est un graphe probabiliste. Sa matrice de transition est donnée ci-dessous. La somme des éléments d'une ligne vaut 1.

$$P_k = (P_k^{(1)} \ P_k^{(2)} \ P_k^{(3)})$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$P_k = P_{k-1} M = P_0 M^k$$

Propriétés d'un graphe probabiliste

- 5) Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial, et P_k l'état probabiliste à l'étape k , on a $P_k = P_0 \times M^k$.
- 6) Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état P_k à l'étape k , converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0 . De plus, P vérifie $P = PM$.

Exemple 23 : l'allumeur de réverbère

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

- Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'états ?
- Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
- Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.
- Soit M la matrice de transition associée à ce graphe :

$$\text{Vérifier que } M = N - \frac{1}{2}R, \text{ où } N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Calculer N^2 , R^2 , NR et RN puis en déduire M^n , pour n entier naturel.

- Au jour 0, le réverbère est allumé (resp. éteint). Calculer la probabilité p_n (resp. p'_n) que le réverbère soit allumé (resp. éteint) au $n^{\text{ième}}$ matin. Faire le lien avec les résultats des simulations observées en 1.

Suit Ex 23

Remarque : on peut varier cet exemple en utilisant l'égalité matricielle suivante, où a et b sont des nombres dans $]0,1[$, et en calculant ainsi aisément la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice de transition associée à un graphe probabiliste :

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/(a+b) & a/(a+b) \\ b/(a+b) & a/(a+b) \end{pmatrix} + (1-a-b) \begin{pmatrix} a/(a+b) & -a/(a+b) \\ -b/(a+b) & b/(a+b) \end{pmatrix}$$

- Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.

Exemple 24 : transferts de population

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires ; 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

- Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.

- Que se passe-t-il si on suppose que 99% des habitants sont initialement en Y ou en X ? que la population est également répartie entre les deux villes (500 000 dans chaque ville en l'année 0) ? Que constate-t-on ?

Remarque : on pourra refaire le problème en variant, non plus les conditions de départ, mais les coefficients de transition : 15% et 5%, ou 40% et 20%, par exemple.

- Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition.

Exemple 25 : un problème d'endémie

Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqure d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer suivant les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;

- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;

- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition. Calculer (avec une calculatrice ou un ordinateur) la probabilité qu'il soit malade ou immunisé au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :

- au départ, il est immunisé,

- au départ, il est non malade et non immunisé,

- au départ, il est malade.

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

Solution

Au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, etc. quel que soit l'état initial, l'individu considéré a une probabilité 0,755 d'être immunisé, 0,151 d'être non malade et non immunisé, 0,094 d'être malade. L'état (0,755 ; 0,151 ; 0,094) est stable. La maladie touche donc en permanence environ 9,4% de la population.

- Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.