Autour des "idemséquences" de pile ou face

Lors de lancers successifs d'une pièce de monnaie, on appelle "idemséquence" une suite ininterrompue de "pile" ou une suite ininterrompue de "face". On peut s'intéresser, dans une suite de n lancers d'une pièce de monnaie, au nombre d'idemséquences ou à la longueur des idemséquences, ou à la longueur maximale …
Cf. en annexe le document d'accompagnement de terminale ES et S (où il y a des petites corrections à faire).
L'exercice ci-dessous est proposé dans un manuel de Terminale ES.
Des simulations sur calculatrice ou tableur sont proposées.

Idemséquences. Graphes probabilistes et chaînes de Markov
(cf. exercice n° 66, p. 252, Bréal, Maths Terminale ES).

On lance n fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle idemséquence une suite de résultats identiques (de pile(s) ou de face(s)).
On considère les événements suivants.
A : la suite de n lancers se termine par une idemséquence de longueur 1 et ne contient aucune idemséquence de longueur 3
B : la suite de n lancers se termine par une idemséquence de longueur 2 et ne contient aucune idemséquence de longueur 3
C : la suite de n lancers contient au moins une idemséquence de longueur 3.
On note p_n, q_n et r_n les probabilités respectives de A, B et C pour n lancers.

1) Représenter par un graphe l'évolution de ce système lors d'un lancer supplémentaire et écrire la matrice de transition.
2) Vérifier que l'état initial est $\left(p_1, q_1, r_1\right) = \left(1, 0, 0\right)$. Calculer $\left(p_2, q_2, r_2\right)$ puis $\left(p_3, q_3, r_3\right)$.
   Vérifier avec un arbre les résultats obtenus.
3) Calculer la probabilité qu'une suite de dix lancers contienne au moins une idemséquence de longueur 3.

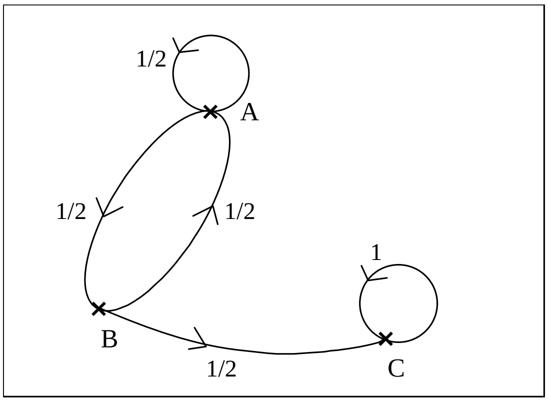
Prolongement
La dernière page de l'annexe "probabilités et statistique" du document d'accompagnement des Terminales S et ES propose de calculer la probabilité d'obtenir au moins une idemséquence de longueur 6 sur 100 lancers.

Solution

On a $\Omega = \left\{P, F\right\}^n$.

Soit A l'événement "la suite des n lancers finit par une idemséquence de longueur 1 et ne possède aucune idemséquence de longueur 3".
Soit B l'événement "la suite des n lancers finit par une idemséquence de longueur 2 et ne possède aucune idemséquence de longueur 3".
Soit C l'événement "la suite des n lancers possède au moins une idemséquence de longueur 3".

1/ Le graphe d'évolution de ce système est le suivant (les probabilités de transition sont inscrites sur les arêtes).

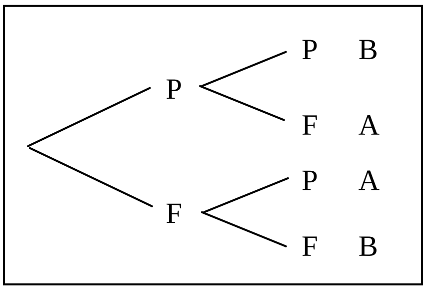


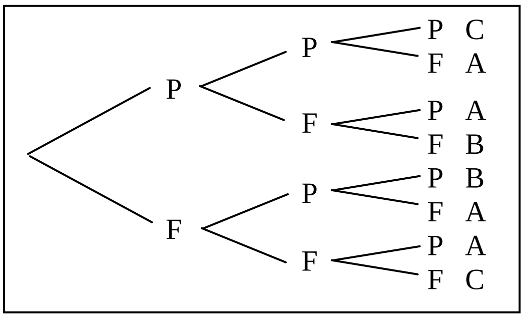
On vérifie aisément, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, tel que $p_n \neq 0, q_n \neq 0, r_n \neq 0,$ on a :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, $X_{n+1} = X_n M$ avec $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ On a évidemment pour le premier lancer $p_1 = 1, q_1 = 0$ et $r_1 = 0$ et on obtient, à partir des arbres de dénombrement : $p_2 = 1/2, q_2 = 1/2$ et $r_2 = 0$ et $p_3 = 1/2, q_3 = 1/4$ et $r_3 = 1/4$.





L'égalité $X_{n+1} = X_n M$ est donc vérifiée pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3/ On a $X_{10} = X_9 M = X_1 M^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{55}{512} & \frac{34}{512} & \frac{423}{512} \\ \frac{34}{512} & \frac{21}{512} & \frac{457}{512} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{55}{512} & \frac{34}{512} & \frac{423}{512} \end{pmatrix}$.

La probabilité qu'une suite de 10 lancers contienne au moins une idemséquence de longueur 3 est de plus de 82% (= 423/512).

Les "idemséquences" avec la calculatrice TI Voyage 200

IDEM : Recherche le maximum d'une "idemséquence"

En entrée : une *n-liste* x de {0,1} ou $[\![0, 9]\!]$ ou $[\![1, 6]\!]$ …
En sortie : la longueur de l'idemséquence (suite de valeurs consécutives égales) ayant une longueur maximale

```
idem(x)
Func
Local n,y,i
dim(x)→n
{ } →y
1→y[1]
For i,2,n
when(x[i-1] = x[i], y[i-1]+1,1) →y[i]
EndFor
max(y)
EndFunc
```

Autre question : calcul de la probabilité qu'il y ait une idemséquence de longueur supérieure ou égale à 6 dans une suite de n "Pile ou Face"

On peut montrer (cf. Annexe Probabilités et Statistique Terminales ES et S, p.151) que la probabilité u_n qu'une suite de n "pile ou face" ait une idemséquence de longueur supérieure ou égale à 6 vérifie la relation de récurrence suivante :

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0,\ u_6 = \frac{2}{2^6}$$

$$\text{pour } n > 6,\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{2^6}\left(1 - u_{n-6}\right)$$

Sur TI Voyage 200, on peut programmer cette suite récurrente afin de la représenter graphiquement :

Dans "mode" positionner "graph" sur "sequence" et dans "Y=" entrer :

```
u1 = u1(n – 1) + 2^( - 6)*(1 – u1(n – 6))
ui1 = {0, 0, 0, 0, 0, 2^( - 5)}
```

Dans "window" x va de 0 à 200 et y de 0 à 1 (yscl 0.1)
Dans F6 Style choisir "line"
Graph

On a alors la représentation de u_n en fonction de n.
On peut alors, en utilisant "Table", lire que pour n = 100, u_n = 0.80, pour n = 150, u_n = 0.92, …

Les idemséquences sur tableur

L'exercice suivant est à réaliser à l'aide d'un tableur.

On lance une pièce de monnaie équilibrée 10 fois de suite.

Soit X le nombre de piles, Y le nombre d'idemséquences (suites de "piles" ou de "faces" consécutifs), Z la longueur de l'idemséquence la plus longue.

Dans l'exemple suivant P P P F P F F P P F, le nombre de piles est 6, le nombre d'idemséquences 6 et la longueur de l'idemséquence la plus longue 3.

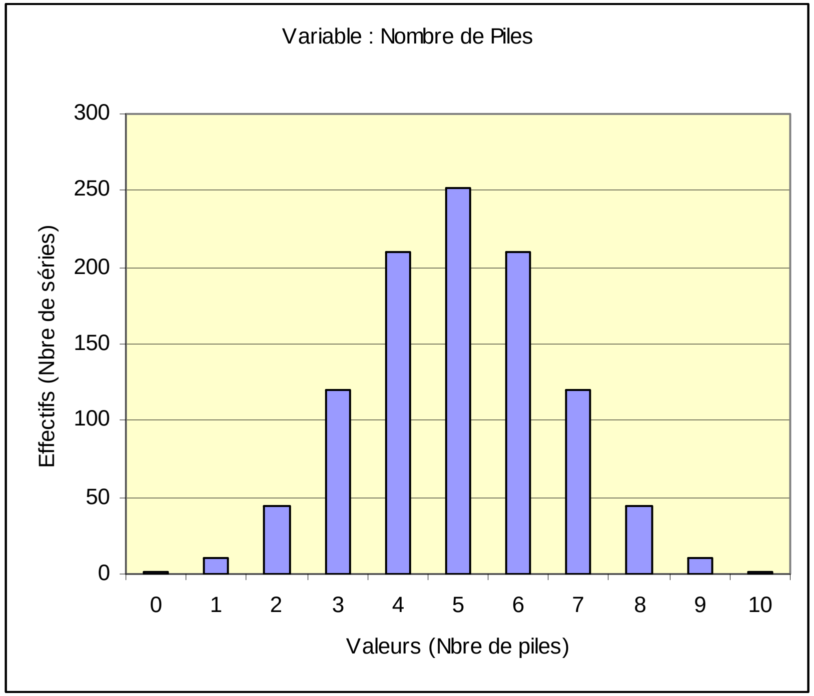
On se propose de déterminer la loi de probabilité de X, de Y, de Z (c'est-à-dire, l'ensemble des valeurs possibles et les probabilités correspondantes).

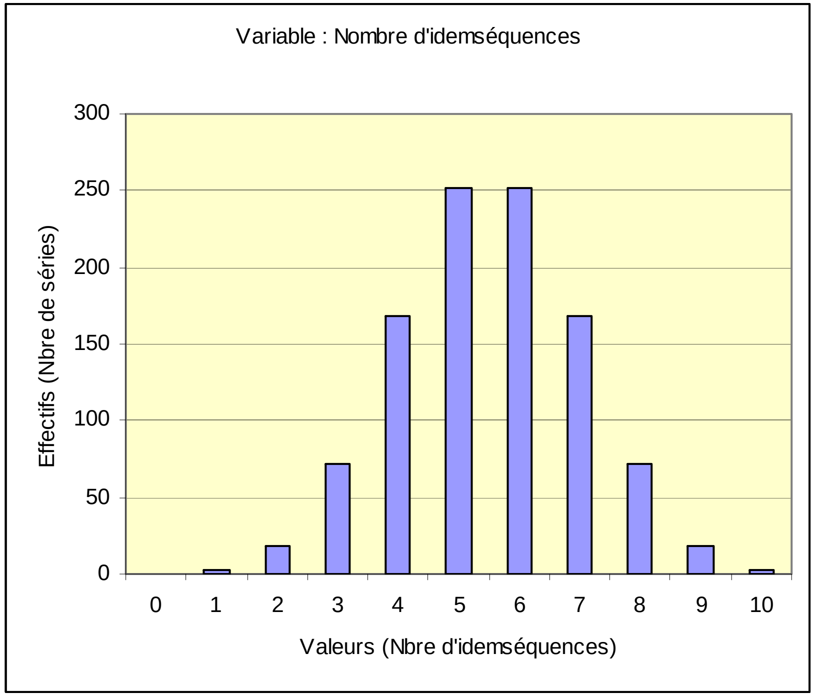
1) Calcul exact sur tableur
On écrit sur le tableur les 2^{10} (soit 1024) résultats possibles ; étant équiprobables, c'est par dénombrement (nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles) que l'on déterminera la loi de probabilité des trois variables aléatoires X, Y, Z.

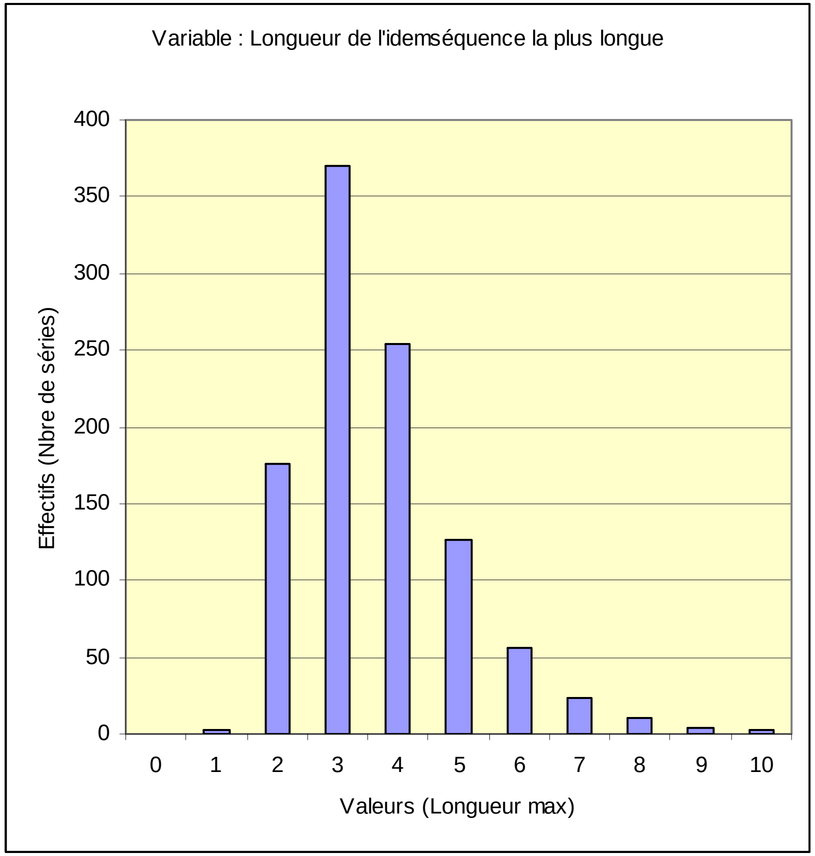
2) Simulation sur tableur
On simule dix lancers consécutifs d'une pièce de monnaie équilibrée un grand nombre de fois, 400 par exemple, et on étudie les distributions de fréquences des variables X, Y, Z sur cet ensemble de 400 simulations.

On lance une pièce de monnaie équilibrée 10 fois de suite (1024 séries équiprobables).
Distribution d'effectifs (et de probabilité en divisant par 1024) des variables :
X : nombre de piles
Y : nombre d'idemséquences
Z : longueur de l'idemséquence la plus longue

Valeurs	Eff. X	Eff. Y	Eff. Z
0	1	0	0
1	10	2	2
2	45	18	176
3	120	72	370
4	210	168	254
5	252	252	126
6	210	252	56
7	120	168	24
8	45	72	10
9	10	18	4
10	1	2	2
Total	1024	1024	1024







– un extrait du document d'accompagnement de chimie de la même classe. On simule des courbes d'évolution de réactions chimiques en comparant ce processus à des tirages de boules dans des urnes sous différentes conditions.

Problèmes divers

Les possibilités de calculs sur tableur peuvent motiver la recherche de formules exploitables au plan numérique pour résoudre un problème, indépendamment de l'intérêt théorique d'une telle formule.

Exemple

Dans la fiche statistique « Faites vos jeux » du document d'accompagnement de la classe de seconde (disponible sur le cédérom joint), on s'intéresse à la probabilité qu'il y ait au moins 6 résultats consécutifs égaux dans une série de n lancers d'une pièce équilibrée. On peut simuler cette situation, comme cela est proposée dans la fiche (ou faire des calculs matriciels tout à fait hors de portée d'un élève de terminale).
On peut aussi se demander si le résultat est calculable à partir d'une formule simple et exploitable sur tableur pour les valeurs de n susceptibles de nous intéresser : établir une telle formule est l'objet du texte ci-dessous.
Les lancers d'une pièce de monnaie équilibrée sont associés comme on l'a vu précédemment à un modèle bien déterminé. Si on note X_n le résultat du n-ème lancer :

$$P\left(X_n = 0\right) = \frac{1}{2} \text{ et } P\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{2}.$$

On construit un compteur pouvant prendre les valeurs 1, …,6, la valeur 6 indiquant la présence d'au moins une séquence de 6 résultats consécutifs égaux. Un exemple est donné ci-dessous, où les résultats des lancers sont en première ligne et la valeur du compteur en deuxième ligne.

$x(n)$	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
$y(n)$	1	2	3	1	2	1	1	1	2	3	1	1	2	1	2	3	4	5	6	6	6	1	2	3	1	1

Cela revient à considérer les variables aléatoires $(Y_n)_{n>0}$, définies par :

$$Y_1 = 1 \text{ et } Y_n = \begin{cases} 6 \text{ si } Y_{n-1} = 6 \\ Y_{n-1} + 1 \text{ si } Y_{n-1} < 6 \text{ et } X_n = X_{n-1} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Alors $P(Y_n = 6)$ est la probabilité pour qu'il y ait au moins 6 résultats consécutifs égaux dans une série de n lancers (on peut généraliser les résultats qui suivent à des valeurs différentes de 6, voir sur le cédérom).
Soit $p_n = P(Y_n = 6)$. On a $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$ et $p_6 = \frac{2}{2^6}$.

Si on lance n fois la pièce avec $n > 6$, alors l'événement « $Y_n = 6$ » se produit dans les cas suivants :
– lorsque $Y_{n-1} = 6$;
– ou dans l'un des deux cas suivants :
- on vient d'obtenir 6 fois 1 (événement A_n), $X_{n-6} = 0$ et $Y_{n-6} < 6$,
- on vient d'obtenir 6 fois 0 (événement B_n), $X_{n-6} = 1$ et $Y_{n-6} < 6$.

Il s'ensuit que, pour tout $n > 6$:

$$p_n = P\ (Y_{n-1} = 6) + P\ (A_n \text{ et } X_{n-6} = 0 \text{ et } Y_{n-6} < 6) + P\ (B_n \text{ et } X_{n-6} = 1 \text{ et } Y_{n-6} < 6),$$

Comme A_n (resp. B_n) est indépendant de l'événement « $X_{n-6} = 0$ et $Y_{n-6} < 6$ » (resp. « $X_{n-6} = 1$ et $Y_{n-6} < 6$ »), on obtient :

$$p_n = p_{n-1} + 1 / 2^6 \times [P\ (X_{n-6} = 0 \text{ et } Y_{n-6} < 6) + P\ (X_{n-6} = 1 \text{ et } Y_{n-6} < 6)].$$

Or, $P(X_{n-6} = 0$ et $Y_{n-6} < 6) + P\ (X_{n-6} = 1$ et $Y_{n-6} < 6)] = P(Y_{n-6} < 6) = 1 - p_{n-6}$.

D'où, pour tout $n > 6$: $p_n = p_{n-1} + \frac{1}{2^6}\left(1 - p_{n-6}\right)$. (1)

On peut ainsi calculer de proche en proche p_n pour $n > 6$ sur tableur ou calculatrice.
On trouve les valeurs suivantes :

n	10	20	50	150	200
p_n	0,094	0,237	0,544	0,918	0,965

Probabilités et statistique – séries ES et S