

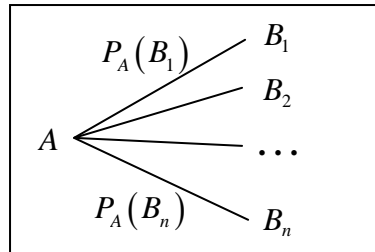
Règles de construction d'un arbre de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. On note A un événement et \bar{A} l'événement contraire, tous deux supposés de probabilité non nulle, $\{B_1, \dots, B_n\}$ un système complet d'événements tous de probabilité non nulle (noté $\{B, \bar{B}\}$ dans le cas $n = 2$).

Un *arbre de probabilité* (ou arbre "pondéré", les pondérations étant ici des probabilités) est en général présenté de haut en bas ou de gauche à droite avec pour racine Ω .

Les sommets correspondent à des événements et les branches issues d'un sommet, A par exemple, ont pour extrémité les événements d'un système complet, $\{B_1, \dots, B_n\}$ par exemple ; les branches sont pondérées par les probabilités conditionnelles à A de ces événements et la somme des poids des branches issues d'un même sommet est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_A(B_i) = 1.$$



On note que la probabilité conditionnelle à Ω n'est autre que P .

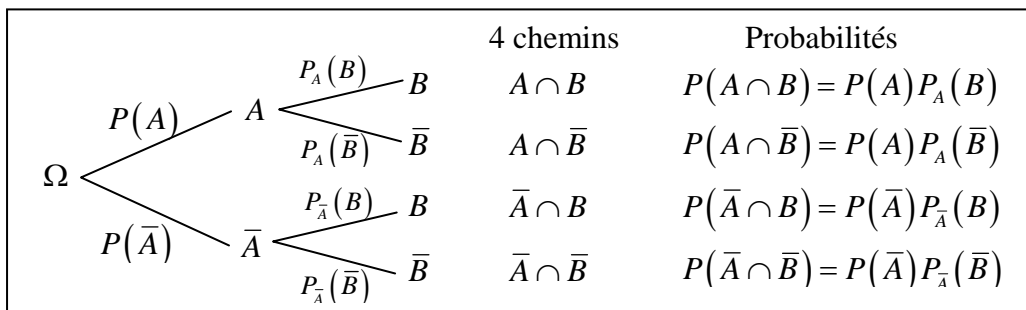
Un *chemin* parcouru de la racine Ω jusqu'à l'extrémité des branches correspond à la conjonction (l'intersection) des événements rencontrés ; la probabilité associée est égale au produit des probabilités rencontrées (règle du produit pour un arbre pondéré) :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

La probabilité d'un événement égal à la réunion d'événements deux à deux disjoints situés à l'extrémité de plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de ces événements (règle de la somme pour un arbre pondéré) :

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \text{ et } (A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$$

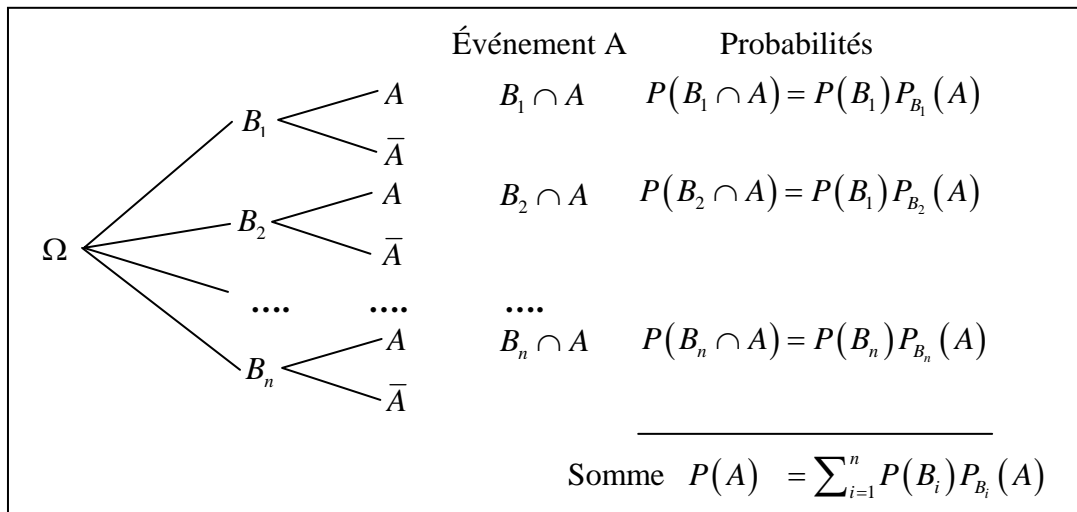
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$



Remarque : A et B sont indépendants en probabilité si et seulement si $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$.

$$\text{On a en effet : } \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}{P(A) + P(\bar{A})} = P(B).$$

Formule des probabilités totales : $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P_{B_i}(A)$.



Formules de Bayes : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_A(B_j) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P_{B_j}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P_{B_i}(A)}$.