

DÉNOMBREMENT

Prérequis

Cf. par exemple le chapitre I du Tome 1 (Algèbre) de Lelong-Ferrand et Arnaudès (Dunod).
Calcul propositionnel (on devrait dire "assertionnel" ou "relationnel", les "propositions" désignant les "relations vraies" à l'intérieur d'une théorie). Prédicats, quantificateurs, ...

Les ensembles ; ensemble des parties d'un ensemble. Produit cartésien d'ensembles.

Opérations sur les ensembles (intersection, union, complémentation, différence et différence symétrique).

Application d'un ensemble vers un autre, injection, surjection, bijection.

Image directe et image réciproque d'un sous-ensemble par une application. Propriétés pour l'union, l'intersection, la complémentation.

Familles d'ensembles.

Relation d'équivalence, partition d'un ensemble, ensemble quotient. Décomposition canonique d'une application.

Relation d'ordre, majorant, borne supérieure, plus grand élément, ...

Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (pour l'ordre naturel) et toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Théorème de la récurrence : soit $P(n)$ une relation dépendant de l'entier n ; si $P(0)$ est vraie et si, pour tout n , la relation $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout n .

Variante : Soit k est un entier naturel non nul ; si $P(k)$ est vraie et si, pour tout n supérieur ou égal à k , la relation $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à k .

Notation. Si n est un entier naturel non nul, l'ensemble des n premiers entiers naturels non nuls est noté $\llbracket 1, n \rrbracket$ (ou $\mathbb{N}_n$).

Théorème : S'il existe une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m \rrbracket$, alors on a : $n \leq m$.

S'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m \rrbracket$, alors on a : $n = m$.

Preuve, par récurrence sur n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $P(n)$: "pour tout entier naturel m , s'il existe une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m \rrbracket$, alors $n \leq m$."

$P(1)$ est vraie car $1 \leq m$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, supposons $P(n)$ vraie.

Soit m un entier naturel et f une injection de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m \rrbracket$. Si $m \notin f(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$ alors l'application g de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$ qui à i associe $f(i)$ est injective et l'hypothèse de récurrence permet de conclure $n+1 \leq m$. Sinon, soit p l'élément de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que $f(p) = m$ et g l'application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$ qui à i associe $f(i)$ si $i < p$ et $f(i+1)$ si $i \geq p$, alors g est injective et l'hypothèse de récurrence permet de conclure $n+1 \leq m$. On a donc montré la première assertion. La deuxième s'en déduit de façon immédiate.

1.1. Notions de cardinalité

On dit qu'un ensemble E est *équipotent* à un ensemble F s'il existe une bijection de E sur F . L'équipotence vérifie les mêmes propriétés qu'une relation d'équivalence (sur la classe des ensembles puisque l'on ne peut pas parler de l'ensemble de tous les ensembles).

1.1.1. Définitions et proposition

Définitions 1 : Un ensemble E est *fini* s'il est vide ou équipotent à $\llbracket 1, n \rrbracket$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$). Un ensemble non fini est dit infini.

Définitions 2 : Si E est fini non vide, l'élément n (qui est unique) est appelé *cardinal* de E et noté $\text{card}(E)$ (ou $\#(E)$ ou $|E|$). Par convention : $\text{card}(\emptyset) = 0$. Un ensemble E équipotent à $\mathbb{N}$ est dit *infini dénombrable* et on note $\text{card}(E) = \aleph_0$ (aleph zéro). Un ensemble *au plus dénombrable* est un ensemble fini ou infini dénombrable.

Théorème : Si E est un ensemble fini non vide de cardinal n et si $a \in E$, alors $E \setminus \{a\}$ est fini, de cardinal $n - 1$. Un sous-ensemble A d'un ensemble fini E est fini et on a $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$; si A est strictement inclus dans E alors $\text{card}(A) < \text{card}(E)$.

Remarque : La dernière propriété n'est pas vérifiée par les ensembles infinis ; par exemple, l'ensemble des entiers naturels est équipotent au sous-ensemble des entiers pairs.

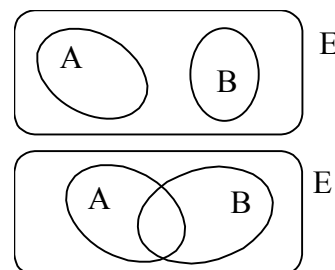
1.1.2. Cardinal de la réunion

Propriétés :

- i) Soient A et B deux sous-ensembles finis d'un ensemble E , alors $A \cup B$ est fini et
si $A \cap B = \emptyset$, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$,

dans le cas général,

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$



Preuve (simplifiée)

Si A ou B est vide, la preuve est évidente.

Supposons A et B finis non vides de cardinal p et q respectivement.

Cas $A \cap B = \emptyset$.

Il existe deux applications f de A dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et g de B dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ bijectives.

Soit h l'application de $A \cup B$ dans $\llbracket 1, p + q \rrbracket$ qui à x associe $f(x)$ si $x \in A$ et $p + g(x)$ si $x \in B$.

Cette application est bien définie car $A \cap B = \emptyset$, et il est aisé de vérifier qu'elle est bijective.

On a donc montré que $A \cup B$ est fini et de cardinal $\text{card}(A) + \text{card}(B)$.

Cas général.

Les sous-ensembles $A \cap B$ et $B \setminus A$ de B sont finis car inclus dans B fini, ils sont disjoints et leur réunion est B donc $\text{card}(B) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A)$.

De même, A et $B \setminus A$ sont deux ensembles finis disjoints dont la réunion est $A \cup B$ donc $A \cup B$ est fini et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A)$.

On en déduit le résultat.

ii) Si $\{A_i ; i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) est un ensemble de parties finies deux à deux disjointes d'un ensemble E alors l'ensemble $\cup_{i=1}^p A_i$ est fini et $\text{card}\left(\cup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i)$ (*)

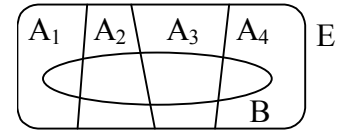
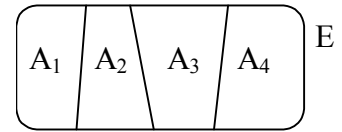
En particulier, si $\{A_i ; i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) est une partition d'un ensemble E constituée de parties finies de E , alors :

E est fini et $\text{card}(E) = \text{card}\left(\cup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i)$

et, si B est un sous-ensemble de E , alors $\{A_i \cap B ; i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ est une partition de B , B est fini et

$\text{card}(B) = \text{card}\left(\cup_{i=1}^p (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i \cap B)$

(Preuves par récurrence).



L'égalité (*) est appelée *règle de la somme*.

Dans le cas particulier où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{card}(A_i) = q$ alors l'égalité (*) devient : $\text{card}(E) = pq$ (et la propriété est appelée *lemme du berger*).

iii) Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une famille de sous-ensembles finis d'un ensemble E , alors $\cup_{i=1}^p A_i$ est fini et on a :

$$\begin{aligned} \text{card}\left(\cup_{i=1}^p A_i\right) = & \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq p} \text{card}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ & + \dots + (-1)^{p+1} \text{card}(A_1 \cap \dots \cap A_p) \end{aligned}$$

C'est la *formule du crible* ou *formule de Poincaré*, qui peut encore s'écrire :

$$\text{card}\left(\cup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

(Preuve par récurrence).

Remarque : Dans le cas où E est fini, on a exactement les mêmes propriétés sur les *fréquences* (ou *proportions*), où pour toute partie A de E on pose : $\text{Fr}(A) = \text{card}(A)/\text{card}(E)$.

On a alors : $\text{Fr}(E) = 1$.

1.2. Ensemble produit, p-listes, arrangements, permutations

Soient $A_1, \dots, A_p$ p ensembles ($p \in \mathbb{N}^*$) et $A_1 \times \dots \times A_p$ le *produit cartésien* de $A_1, \dots, A_p$ défini par :

$$A_1 \times \dots \times A_p = \{(a_1, \dots, a_p) ; \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_i \in A_i\}$$

Dans le cas où l'on a $A_1 = \dots = A_p = E$, le produit cartésien $A_1 \times \dots \times A_p$ est noté E^p et les éléments sont appelés *p-listes* d'éléments de E .

Remarque : Une *p-liste* d'un ensemble E peut être identifiée à une application de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans E .

Propriétés :

(i) Si A et B sont deux ensembles finis alors $A \times B$ est fini et on a : $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$.

Preuve (simplifiée) :

Si A ou B est vide, la preuve est évidente.

Supposons A et B finis non vides de cardinal p et q respectivement. Pour tout b de B , il est aisé de vérifier que l'ensemble $A \times \{b\}$ est fini, de cardinal p , et que l'ensemble $\{A \times \{b\} ; b \in B\}$, constitué de q ensembles de cardinal p , forme une partition de $A \times B$. On en déduit, par le lemme du berger, que $A \times B$ est fini et $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$.

- (ii) Si, $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, ($p \geq 2$), A_i est fini, alors $A_1 \times \dots \times A_p$ est fini et
 $\text{card}(A_1 \times \dots \times A_p) = \prod_{i=1}^p \text{card}(A_i)$ (Preuve par récurrence.).
- (iii) Le nombre de p -listes d'un ensemble fini E de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$) est n^p .
(cas particulier de la propriété précédente).
- (iv) Le nombre d'applications d'un ensemble fini de p éléments vers un ensemble fini de n éléments est n^p .
- (v) Si E est un ensemble fini de cardinal n alors l'ensemble des parties de E , $\mathcal{P}(E)$, est un ensemble fini de cardinal 2^n .
Preuve. L'application qui à une partie A de E associe sa fonction caractéristique 1_A est une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ sur l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$ soit
 $(\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n)$.

Remarque : Les fonctions caractéristiques, appelées aussi "*indicateurs*" jouent un très grand rôle en statistique et probabilité.

Définition :

Un *arrangement* de p éléments ($p \in \mathbb{N}^*$) d'un ensemble fini E de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$) est une p -liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Remarque : Un arrangement de p éléments d'un ensemble fini E de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$) peut être identifié à une injection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans E .

Proposition :

Le nombre d'arrangements de p éléments ($p \in \mathbb{N}^*$) d'un ensemble fini E de cardinal n , ($n \in \mathbb{N}^*$), noté A_n^p , vérifie : $A_n^p = 0$ si $p > n$, $A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$ si $p \leq n$.

Notation factorielle :

On pose : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ et par convention $0! = 1$.

On a alors $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ et on étend la définition de A_n^p aux cas $p = 0$ et $n = 0$ en posant : $A_n^0 = 1$ et

$$A_0^0 = 1$$

Preuve de la proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de n éléments est nul si $p > n$, d'où $A_n^p = 0$ si $p > n$.

Montrons par récurrence sur n que l'on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\text{pour tout } p \text{ de } \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) \quad (**)$$

Pour $n = 1$, $A_1^1 = 1$, la propriété (**) est vérifiée.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Supposons la propriété vérifiée pour l'entier n et montrons la pour l'entier $(n+1)$.

Pour $p = 1$, le nombre d'arrangements de 1 élément d'un ensemble E de cardinal $(n+1)$ est égal à $(n+1)$ et la propriété (**) est vérifiée.

Soit p un entier vérifiant $2 \leq p \leq n+1$.

Soit a un élément d'un ensemble E de cardinal $(n+1)$ et $\mathcal{I}_a$ l'ensemble des arrangements de p éléments de E dont le dernier élément est a ; cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des arrangements de $(p-1)$ éléments de l'ensemble $E \setminus \{a\}$; l'ensemble $E \setminus \{a\}$ est de cardinal n et $(p-1)$

est un entier compris entre 1 et n ; par hypothèse de récurrence, $\mathcal{I}_a$ est fini et de cardinal $A_n^{p-1} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+2)$.

L'ensemble $\{\mathcal{I}_a ; a \in E\}$ est composé de $(n+1)$ ensembles finis de même cardinal, A_n^{p-1} , formant une partition de l'ensemble $\mathcal{I}$ des arrangements de p éléments de E .

On en déduit par le lemme du berger que $\mathcal{I}$ est fini et

$$A_{n+1}^p = \text{card}(\mathcal{I}) = (n+1) \times A_n^{p-1} = (n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+2).$$

La propriété (**) est donc vérifiée pour l'entier $(n+1)$.

On a montré que la propriété (**) est vraie pour $n = 1$ et que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si elle est vraie pour l'entier n , elle est vraie pour l'entier $(n+1)$; la propriété (**) est donc montrée pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Autre preuve plus simple utilisant la règle du produit d'un arbre de dénombrement (cf. plus loin)

Soit E un ensemble fini de cardinal n , $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On a de façon évidente $A_n^p = 0$ si $p > n$.

Montrons par récurrence sur p que l'on a pour tout p de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) \quad (*)$$

Pour $p = 1$, le nombre d'arrangements de 1 élément de E est égal à n ; l'égalité (*) est donc vérifiée pour $p = 1$.

Soit p un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et supposons l'égalité (*) vérifiée pour cet entier p ; montrons alors qu'elle est vérifiée pour l'entier $(p+1)$.

Un arrangement de $(p+1)$ éléments de E est complètement déterminé :

- par un arrangement de p éléments de E (les p premiers éléments du $(p+1)$ -uplet) et
- par un élément n'appartenant pas à l'ensemble des p premiers éléments choisis (le dernier élément du $(p+1)$ -uplet).

Le nombre d'arrangements de $(p+1)$ éléments de E est donc égal au nombre d'arrangements de p éléments de E multiplié (règle du produit) par $(n-p)$, nombre de choix du dernier élément.

On a donc : $A_n^{p+1} = A_n^p \times (n-p) = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p)$ et l'égalité (*) est vérifiée pour l'entier $p+1$.

On a montré que l'égalité (*) est vraie pour $p = 1$ et que, pour tout p de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, si elle est vraie pour l'entier p , elle est vraie pour l'entier $p+1$. On a donc montré que l'égalité (*) est vraie pour tout entier p de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Définition :

Une *permutation* d'un ensemble fini E de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$) est un arrangement des n éléments de E .

Remarque : Une permutation d'un ensemble fini non vide E peut être identifiée à une bijection de E dans lui-même.

Proposition :

Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide E de cardinal n est $n!$ ($= A_n^n$).

Application aux tirages dans une urne :

On considère une urne E contenant n boules numérotées de 1 à n :

- le nombre de tirages successifs et avec remise de p boules de l'urne est n^p ,
- le nombre de tirages successifs et sans remise de p boules de l'urne est A_n^p ,
- le nombre de tirages successifs et sans remise des n boules de l'urne est $n!$

Ces dénombrements peuvent être visualisés à l'aide d'arbres de dénombrement (cf. ci-après), pour lesquels on peut énoncer la règle dite du produit.

Règle du produit (pour les arbres de dénombrement)

Si une expérience comporte K étapes avec, pour chaque étape k , $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$, n_k résultats possibles (n_k ne dépendant que de l'étape k) alors le nombre total de résultats possibles est $\prod_{k=1}^K n_k$.

Preuve

Par récurrence sur K . Soit $K = 2$.

Soit $\{a_i ; i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket\}$ l'ensemble des résultats de la 1^{ère} étape et, $\forall i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$, $\{b_{i,j} ; j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket\}$ l'ensemble des résultats de la 2^{ème} étape correspondant au résultat a_i de la 1^{ère} étape.

L'ensemble des résultats de l'expérience s'écrit : $\Omega = \{(a_i, b_{i,j}) ; i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket, j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket\}$ et on a :

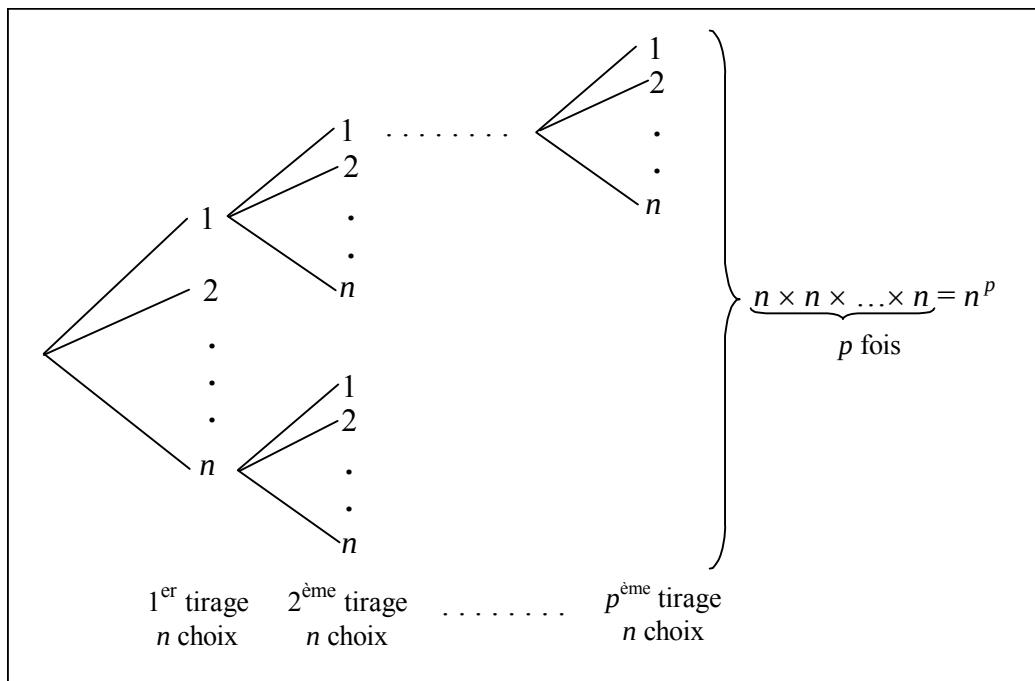
$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_1} \Omega_i$ avec $\Omega_i = \{(a_i, b_{i,j}) ; j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket\}$. Les $(\Omega_i)_{i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket}$ sont deux à deux disjoints et de même cardinal n_2 . On en déduit par le lemme du berger $\text{card}(\Omega) = n_1 \times n_2$, d'où le résultat pour $K = 2$.

On suppose la propriété vérifiée au rang K .

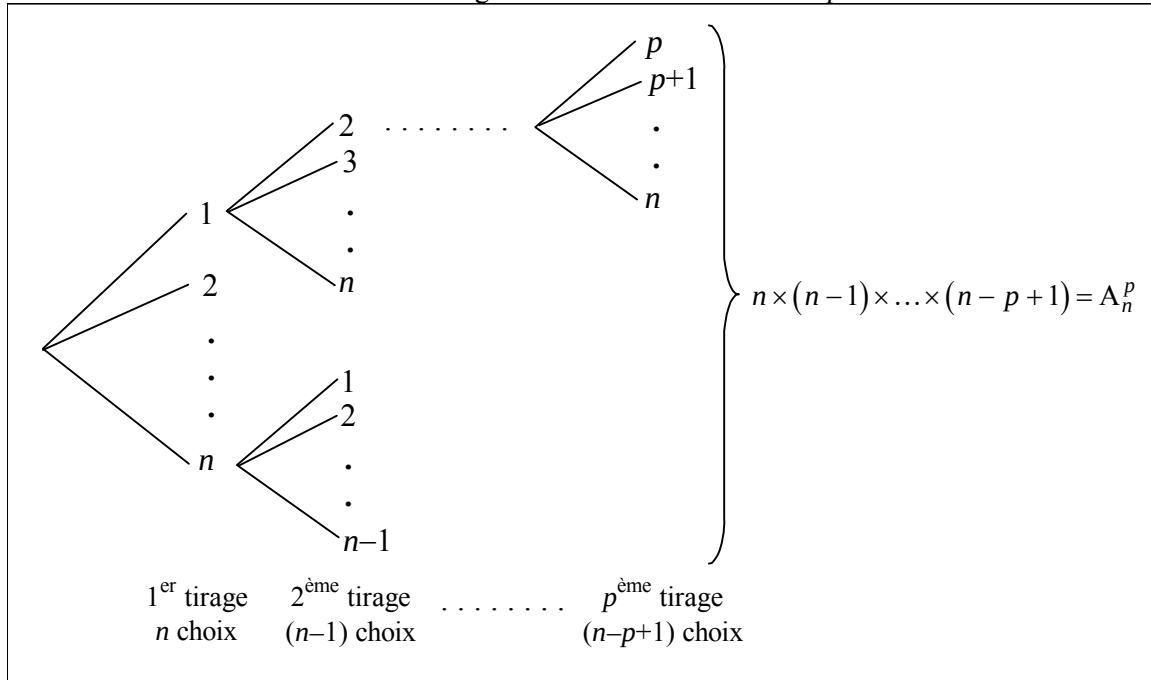
On désigne par a_i , $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, les résultats des K premières étapes, avec $N = \prod_{k=1}^K n_k$ d'après l'hypothèse de récurrence et, $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, par $b_{i,j}$, $j \in \llbracket 1, n_{K+1} \rrbracket$ les résultats de l'étape $K+1$ correspondant au résultat des K premières étapes désigné par a_i .

L'ensemble des résultats de l'expérience s'écrit : $\Omega = \{(a_i, b_{i,j}) ; i \in \llbracket 1, N \rrbracket, j \in \llbracket 1, n_{K+1} \rrbracket\}$ et la preuve faite pour $K = 2$ permet de conclure.

Nombre de tirages successifs **avec** remise de p boules



Nombre de tirages successifs **sans** remise de p boules



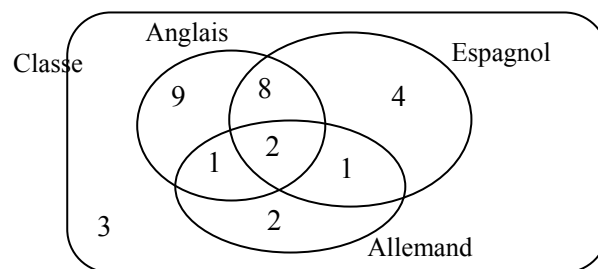
Remarque : cas particulier de la règle du produit

Dans le cas où, pour tout k de $\llbracket 1, K \rrbracket$, l'ensemble des résultats de l'étape k est un ensemble fini A_k de cardinal n_k , alors l'ensemble des résultats de l'expérience est le produit cartésien $A_1 \times \dots \times A_K$, ensemble fini de cardinal $\prod_{k=1}^K n_k$.

1.3. Outils de dénombrements : diagrammes, tableaux, arbres

1.3.1. Diagramme de Venn

Dans une classe de 30 élèves, 20 font de l'anglais, 15 de l'espagnol, 6 de l'allemand, 10 de l'anglais et de l'espagnol, 3 de l'anglais et de l'allemand, 3 de l'espagnol et de l'allemand et 2 font les trois langues. Combien y a-t-il d'élèves qui ne font aucune de ces trois langues ?



3 élèves ne font aucune des 3 langues

1.3.2. Tableau de dénombrement

On lance deux fois de suite un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

On s'intéresse à la somme des points marqués. De combien de façons peut-on obtenir une somme égale à 7 ?

36 résultats possibles
dont 6 donne une
somme égale à 7

1 ^{er} \ 2 ^{ème}	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1.3.3. Diagramme, arbre de fréquences conditionnelles, tableau de fréquences

On a vu précédemment les arbres et les tableaux de dénombrement. Il ne faut pas les confondre avec les arbres pondérés (de fréquences conditionnelles ou de probabilités conditionnelles) et les tableaux d'effectifs, de fréquences ou de probabilités (représentant une distribution conjointe croisant les modalités des deux variables et les distributions de chacune des deux variables dans les marges du tableau).

Un exercice présentant ces notions est proposé dans ce paragraphe. Ce type d'exercice est abordé dans l'annexe "probabilités et statistique, séries S et ES" du document d'accompagnement aux programmes de terminales, sous le titre "étude de deux variables qualitatives, fréquences conditionnelles". Il s'agit en fait d'exercices assez simples sur les effectifs (ou cardinaux) et les fréquences (ou proportions) qui pourraient être abordés au collège et permettraient d'aborder plus aisément les notions de probabilités et de probabilités conditionnelles ainsi que la redoutable formule de Bayes.

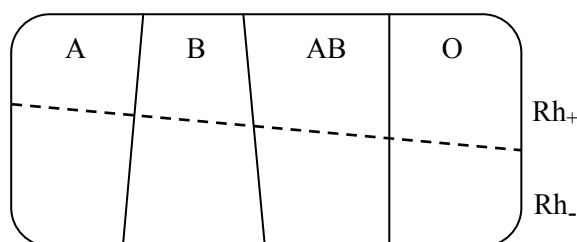
Énoncé de l'exercice

On sait que l'on peut répartir la population, d'une part, selon quatre groupes sanguins, A, B, AB et O, d'autre part, selon deux facteurs rhésus, positif et négatif. Les proportions par rapport à l'ensemble de la population des quatre groupes sanguins sont 40%, 10%, 5% et 45% respectivement. Dans chacun des quatre groupes sanguins les proportions de rhésus positif sont 82%, 81%, 82% et 80% respectivement.

Quelle est la proportion de rhésus positif dans la population totale ? Quelle est la proportion de personnes de groupe A parmi celles de rhésus positif ?

Diagramme de Venn

Deux partitions croisées de respectivement 4 et 2 catégories associées aux variables « Groupe sanguin » et « Rhésus », d'où une partition de la population en 8 catégories.

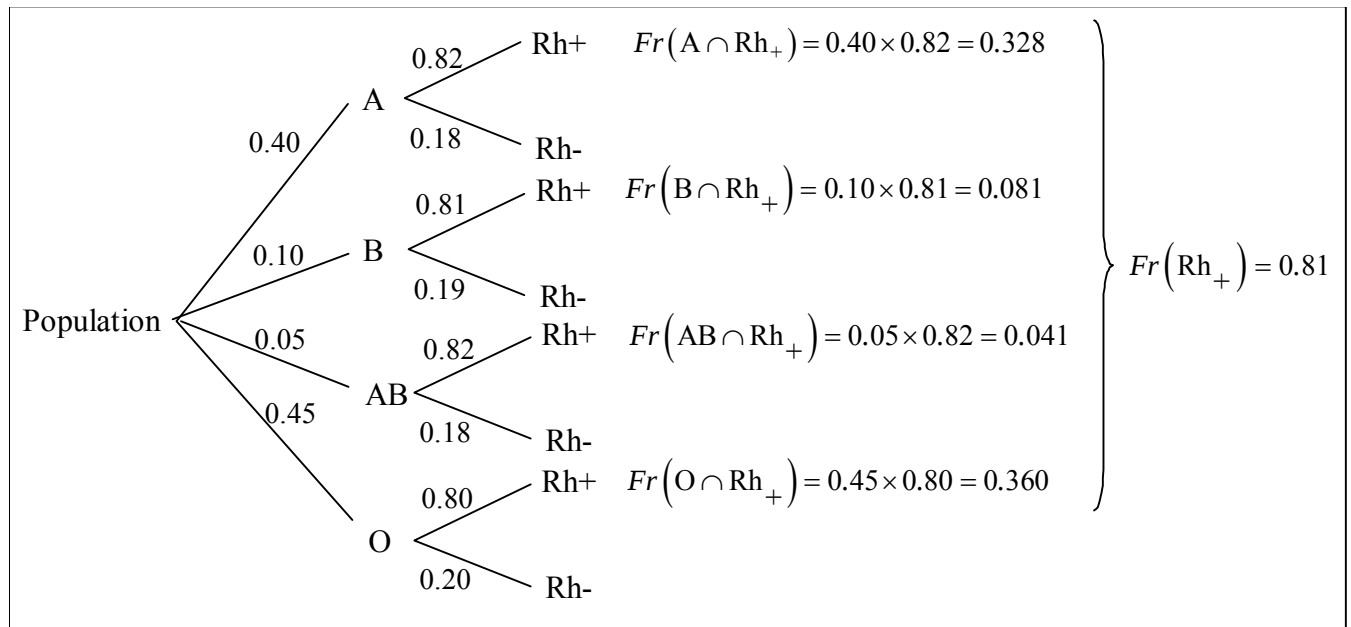


Partition de la
population en 8
catégories

Arbre de fréquences conditionnelles (arbre pondéré)

Si on note $Fr_A(Rh_+)$ la fréquence de « Rhésus positif » dans le « groupe sanguin A », on a par hypothèse : $Fr_A(Rh_+) = 0.82$ (qui est aussi $Fr_A(A \cap Rh_+)$.)

Pour obtenir la proportion dans la population de l'ensemble des individus qui sont « Rhésus positif » et « groupe sanguin A », on utilise alors la propriété (appelée règle du produit pour un arbre pondéré) : $Fr(A \cap Rh_+) = Fr(A)Fr_A(Rh_+)$.



Les ensembles $A \cap Rh_+$, $B \cap Rh_+$, $AB \cap Rh_+$ et $O \cap Rh_+$ forment une partition de Rh_+ .

On peut alors utiliser la propriété suivante (appelée règle de la somme) :

$$card(Rh_+) = card(A \cap Rh_+) + card(B \cap Rh_+) + card(AB \cap Rh_+) + card(O \cap Rh_+)$$

vérifiée par le cardinal mais aussi par la fréquence :

$$Fr(Rh_+) = Fr(A \cap Rh_+) + Fr(B \cap Rh_+) + Fr(AB \cap Rh_+) + Fr(O \cap Rh_+)$$

Enfin, on en déduit :

$$Fr_{Rh_+}(A) = \frac{Fr(A \cap Rh_+)}{Fr(Rh_+)} = \frac{0.328}{0.81} = 0.40 \quad (*)$$

On reconnaît la formule de Bayes pour les fréquences.

(Pour le secondaire, la notation choisie pour les ensembles peut poser problème, en particulier les notations AB et O).

Distributions de fréquences (conjointe et marginales) des variables « Groupe sanguin » et « Rhésus »

Plutôt qu'un arbre de fréquences conditionnelles, on peut également compléter le tableau suivant, présentant les distributions de fréquences conjointe et marginales des variables « Groupe sanguin » et « Rhésus » et en déduire directement (*).

Tableau de fréquences

Rh \ Gr	A	B	AB	O	Ens
Rh+	32.8%	8.1%	4.1%	36%	81%
Rh-	7.2%	1.9%	0.9%	9%	19%
Ens	40.0%	10.0%	5.0%	45%	100%

1.4. Combinaisons, formule du binôme

1.4.1. Combinaisons, définition et propriétés

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et p un entier naturel.

Une combinaison de p éléments de E est une partie (c'est-à-dire un sous-ensemble) de p éléments de E .

Remarque : L'ensemble des combinaisons de p éléments de E étant inclus dans l'ensemble fini $\mathcal{P}(E)$ (de cardinal 2^n) est fini.

Proposition

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E de cardinal n , noté $\binom{n}{p}$ (ou C_n^p) et qui peut être énoncé " p parmi n " est :

$$\binom{n}{p} = 0 \text{ si } p > n, \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Preuve simplifiée

Montrons $A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$

L'égalité est évidente pour $n = 0$ ou $p = 0$ ou $p > n$. Soit p et n tels que $1 \leq p \leq n$.

Il y a A_n^p manières de choisir une p -liste d'éléments distincts de E et chaque partie de E à p éléments peut être ordonnée en $p!$ p -listes distinctes. Le nombre $\binom{n}{p}$ de parties de E à p éléments vérifie donc

$$A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$$

On peut aussi éviter d'utiliser les arrangements et proposer une preuve par récurrence en utilisant la formule de Pascal.

Propriétés

$$(1) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{1} = n$$

$$(2) \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$(3) \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \times \binom{n-1}{p-1}$$

$$(4) \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \text{ formule de Pascal}$$

$$(5) \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$$

$$(6) 2^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$$

$$(7) \binom{N}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} \quad N \in \mathbb{N}^*, K \in \llbracket 0, N \rrbracket, n \in \mathbb{N}^*, \text{ formule de Vandermonde}$$

Preuves simplifiées

Les preuves peuvent être faites par le calcul mais raisonner sur les ensembles est souvent plus élégant. Par exemple pour (2), on montre que l'application qui à une partie à p éléments de E associe son complémentaire dans E est une bijection de l'ensemble des parties à p éléments de E sur l'ensemble des parties à $n-p$ éléments de E , d'où l'égalité des cardinaux.

Pour la formule de Pascal (4), égalité vérifiée pour n strictement positif, c'est-à-dire E non vide, on isole un élément a de E . L'ensemble des parties de E à p éléments est la réunion de deux ensembles disjoints : l'ensemble des parties de E à p éléments ne contenant pas a et l'ensemble des parties de E à p éléments contenant a .

Le premier ensemble est en bijection avec l'ensemble des parties de $E \setminus \{a\}$ à p éléments, en nombre $\binom{n-1}{p}$, le deuxième est en bijection avec l'ensemble des parties de $E \setminus \{a\}$ à $p-1$ éléments, en nombre $\binom{n-1}{p-1}$ d'où l'égalité.

Cette égalité permet de construire pas à pas le *triangle de Pascal* :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour (5), l'ensemble des parties à $(p+1)$ éléments de $\mathbb{N}_{n+1} = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ est la réunion pour $k=p$ à n des ensembles de parties à $p+1$ éléments de $\mathbb{N}_{n+1}$ dont le plus grand est $k+1$. Le plus grand étant fixé, le nombre de parties à $(p+1)$ éléments de $\mathbb{N}_{n+1}$ dont le plus grand est $(k+1)$ est $\binom{k}{p}$, d'où l'égalité.

Pour (6), on dénombre de deux manières l'ensemble des parties de E . On a déjà vu, en utilisant les fonctions caractéristiques, que l'on a : $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est la réunion pour $p=0$ à n des ensembles de parties de E à p éléments, soit $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$ et l'égalité.

Pour (6) on pourra également utiliser la formule du binôme.

Pour (7), on considère un partage d'un ensemble fini E de cardinal N ($\in \mathbb{N}^*$) en deux parties A et B de cardinal K et $N - K$ respectivement. L'ensemble des parties de E à n éléments est la réunion, pour k allant de 0 à n , des ensembles (disjoints 2 à 2) des parties de E ayant k éléments dans A et $n - k$ dans B . Pour k fixé, le cardinal de cet ensemble est $\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}$ d'où l'égalité.

Applications de l'égalité (5)

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

d'où l'on déduit $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (Cf. aussi applications de la formule du binôme).

1.4.2. Formule du binôme, coefficients binomiaux

Proposition : Pour tout a et b d'un anneau (unitaire) qui commutent entre eux, on a la *formule du binôme* de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Définition : les nombres $\binom{n}{k}$, pour $k = 0$ à n , sont appelés *coefficients binomiaux*.

Attention à la démonstration par récurrence.

Si a ou b est nul, la formule est vraie de façon évidente.

Supposons a et b non nuls.

L'égalité est vraie pour $n = 0$ en utilisant la convention $x^0 = 1$ pour x non nul.

Supposons que l'égalité est vérifiée à l'ordre n ; montrons la à l'ordre $n + 1$:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \end{aligned}$$

à condition de supposer $n \geq 1$.

En faisant un changement de variable sur le premier signe somme, on obtient :

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

On a montré que, pour tout n supérieur ou égal à 1, si l'égalité est vraie à l'ordre n , elle est vraie à l'ordre $n + 1$. Pour achever la démonstration par récurrence, il reste à vérifier qu'elle est vraie à l'ordre 1.

On a bien en effet à l'ordre 1 : $a+b = b+a = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$.

Propriétés

$$\begin{aligned} 2^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ 0 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \\ 2^{n-1} &= \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Applications :

Inégalité de Bernoulli : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx$

Formule de Leibnitz

si f et g sont des fonctions n fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors fg est n fois dérivable sur I

et on a : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Formule de Moivre : $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$

Formules d'Euler : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et linéarisation de $\sin^4 x$ (par ex.).

Théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier relatif quelconque, alors $a^p \equiv a(p)$.

Idée de la preuve par récurrence :

$$a^p = ((a-1)+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (a-1)^k \equiv 1 + (a-1)^p \equiv 1 + (a-1) = a.$$

Somme des puissances p des premiers entiers non nuls

On pose : $S_{n,p} = \sum_{k=1}^n k^p$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$

En appliquant la formule du binôme à $(l+1)^{p+1}$ pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et en sommant membre à membre, on

montre : $(n+1)^{p+1} = 1 + \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} S_{n,k}$

On obtient en particulier : $S_{n,0} = n$, $S_{n,1} = \frac{n(n+1)}{2}$, $S_{n,2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_{n,3} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

On a vu que ces sommes pouvaient être obtenues à partir de la propriété 5 des combinaisons.

Combinaisons sans répétition et avec répétition ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$)

On pose : $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n; \sum_{i=1}^n x_i = p\}$ et $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n; \sum_{i=1}^n x_i = p\}$

On montre : $\text{card}(A) = \binom{n}{p}$ (ou C_n^p) et $\text{card}(B) = \binom{n+p-1}{p}$ (noté Γ_n^p).

Pour la deuxième égalité, on introduira l'ensemble

$A' = \{(y_1, \dots, y_{n+p-1}) \in \{0,1\}^{n+p-1}; \sum_{i=1}^{n+p-1} y_i = p\}$ que l'on mettra en bijection avec B .

Autre méthode :

On a : $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, de classe C^∞ sur son domaine de convergence.

Par dérivation successive, on obtient : $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{p} x^p$

On a par ailleurs :

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^n} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)^n = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} x^{k_1+\dots+k_n} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n; \sum_{i=1}^n k_i = p\}} x^p = \sum_{p=0}^{\infty} c_{n,p} x^p$$

où le coefficient $c_{n,p}$ est le nombre d'éléments $(k_1, \dots, k_n)$ de $\mathbb{N}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n k_i = p$, c'est-à-dire Γ_n^p .

On en déduit l'égalité : $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

Applications :

1) le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation : $\sum_{i=1}^n x_i = p$ est Γ_n^p .

2) on peut ranger p boules dans n casiers de Γ_n^p façons différentes.

Séries formelles exponentielles

On pose : $e^u = \sum_{p \geq 0} \frac{u^p}{p!}$ et $e^v = \sum_{q \geq 0} \frac{v^q}{q!}$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } e^u e^v &= \left(\sum_{p \geq 0} \frac{u^p}{p!} \right) \left(\sum_{q \geq 0} \frac{v^q}{q!} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p+q=n} \frac{u^p}{p!} \frac{v^q}{q!} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u^p v^{n-p} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(u+v)^n}{n!} = e^{u+v} \end{aligned}$$

Formule d'inversion de Pascal

$$\forall n \geq 0, f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k \Leftrightarrow g_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$$

Idée de la preuve à partir de séries entières :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) = e^x \hat{g}(x) &\Leftrightarrow \hat{g}(x) = e^{-x} \hat{f}(x) \text{ soit} \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} g_q \frac{x^q}{q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} \binom{n}{q} g_q \right) \frac{x^n}{n!} \quad \Leftrightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} f_q \frac{x^q}{q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} \binom{n}{q} (-1)^{n-q} f_q \right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

d'où la formule d'inversion de Pascal en identifiant les coefficients des séries entières.

Généralisation des lois binomiale et hypergéométrique à plusieurs catégories de boules

Identité binomiale : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

Identité multinomiale :

$$(a_1 + \dots + a_r)^n = \sum_{\{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r; \sum_{i=1}^r k_i = n\}} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}, \quad r \in \mathbb{N}_*, (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r, n \in \mathbb{N}^*$$

Formule de Vandermonde : $\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}$, $N \in \mathbb{N}_*$, $K \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}^*$

Généralisation :

$$\binom{N}{n} = \sum_{\{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r; \sum_{i=1}^r k_i = n\}} \binom{N_1}{k_1} \dots \binom{N_r}{k_r}, \quad r \in \mathbb{N}^*, N \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*, (N_1, \dots, N_r) \in \mathbb{N}^r, \sum_{i=1}^r N_i = N$$

Application :

Urne à r catégories de boules en nombres $N_1, \dots, N_r$, $\sum_{i=1}^r N_i = N$.

1) On tire au hasard *successivement et avec remise* n boules de l'urne.

Soit pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, X_i le nombre de boules de la i ème catégorie et $p_i = N_i / N$, alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^r [X_i = k_i]\right) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}, \quad (k_1, \dots, k_r) \in \llbracket 0, n \rrbracket^r, \sum_{i=1}^r k_i = n$$

(loi multinomiale).

2) On tire au hasard *simultanément* n boules de l'urne $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

Soit pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, X_i le nombre de boules de la i -ème catégorie, alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^r [X_i = k_i]\right) = \frac{\binom{N_1}{k_1} \cdots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{k}}, \quad (k_1, \dots, k_r) \in \llbracket 0, n \rrbracket^r, \quad \sum_{i=1}^r k_i = n$$

(loi multihypergéométrique ou polyhypergéométrique).

Utilisations des combinaisons en probabilité

Calcul de l'espérance mathématique et de la variance d'une loi binomiale, d'une loi hypergéométrique.

Somme de deux v.a.r. indépendantes binomiales (n_1, p) et (n_2, p) .

Idées d'exercices

Menus, Délégués de classes, Anagrammes

Tiercé et quarté, dans l'ordre, dans le désordre

Jeu de loterie, de casino

Jeu de Poker, Jeu de dominos

Braille, Code d'immeubles, Plaques minéralogiques

Marche aléatoire sur un réseau, sur un triangle, un carré, un tétraèdre