Le problème des anniversaires

On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire. Calculer la probabilité pour que deux élèves au moins de cette classe aient leurs anniversaires le même jour. Application numérique. (Pour simplifier, on suppose que l'année a 365 jours).

Solution

Soit $E=\{1,2,\cdots,365\}$ l'ensemble des jours de l'année. Soit $n\in\mathbb{N}\quad n\geq 2$.

Si les n élèves de la classe sont numérotés de 1 à n, leurs jours d'anniversaire peuvent être représentés par un n-uplet de E (le 1er élément du n-uplet désigne le jour d'anniversaire de l'élève 1, le 2ème élément celui de l'élève 2, etc.).

On a donc $\Omega_n = E^n$ et $Card(\Omega_n)=365^n$. P_n est l'équiprobabilité sur $\left(\Omega_n,\mathcal{P}(\Omega_n)\right)$.

Soit A l'événement : "au moins deux élèves ont leur anniversaire la même jour" et $\overline{A}$ l'événement contraire "tous les élèves ont des jours d'anniversaire distincts" :

$$Card\left(\overline{A}\right)=A_{365}^{n}\,,\quad P_n\left(\overline{A}\right)=\frac{\mathrm{A}_{365}^{n}}{365^n}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{365}\right)=P_{n-1}\left(\overline{A}\right)\left(1-\frac{n-1}{365}\right)\text{ et } P_n\left(A\right)=1-P_n\left(\overline{A}\right).$$

Application numérique:

n	10	20	23	30	40	50
P	0.13	0.43	0.52	0.71	0.89	0.97

Pour simplifier, on peut utiliser l'approximation suivante :

$$P_n\left(\overline{A}\right)=\exp\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{k}{365}\right)\simeq\exp\left[-\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{n-1}k\right]\simeq\exp\left(-\frac{n^2}{730}\right)$$

et on vérifie : $P_n\left(\overline{A}\right)\simeq\frac{1}{2}$ pour $n=\sqrt{730\ln 2}\simeq 23$.