Jeu de Poker

Énoncé

On tire simultanément et au hasard (c'est-à-dire avec équiprobabilité) 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ? une paire ? un brelan ? un full ? une double paire ? une quinte ?

> *Définitions*
> Un jeu de 32 cartes est composé du croisement de 4 "couleurs" Pique, Cœur, Carreau, Trèfle, et de 8 "hauteurs" As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7. Une main est un ensemble de 5 cartes extraites du jeu.
> Un carré est l'obtention de 4 cartes d'une même hauteur et d'une autre carte, une paire est l'obtention de deux cartes d'une même hauteur et de trois autres cartes de hauteurs différentes entre elles (et différentes de celle de la paire), un brelan est l'obtention de trois cartes de même hauteur et de deux autres cartes de hauteurs différentes (et différentes de celle du brelan), un full est un brelan et une paire, une double paire est constituée de deux paires de hauteurs différentes et d'une autre carte de hauteur différente de celles des paires, une quinte est une main de 5 hauteurs consécutives.

Solution

L'ensemble Ω des résultats possibles de ce tirage aléatoire est l'ensemble de toutes les "mains" de cinq cartes possibles ; on a $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{32}{5} = 201\,376$ et P est l'équiprobabilité sur Ω.

Un événement, "obtenir un carré" par exemple, est identifié au sous-ensemble de Ω qui réalise cet événement.

Soit A l'événement "obtenir un carré", B l'événement "obtenir une paire", C l'événement "obtenir un brelan", D l'événement "obtenir un full", E l'événement "obtenir une double paire", F l'événement "obtenir une quinte".

Le choix d'un élément de A peut être décomposé en deux étapes, choix de la hauteur du carré 8, puis choix de la dernière carte parmi toutes les cartes restantes 28. Donc :

$$\operatorname{card}(A) = 8 \times 28 \quad \text{et} \quad P(A) = 224/201\,376 \simeq 0.001\,.$$

Le choix d'un élément de B peut être décomposé en deux étapes, choix de la paire (c'est-à-dire, choix d'une hauteur puis de deux cartes dans cette hauteur) puis choix de 3 cartes qui ne forment pas une figure avec la paire (c'est-à-dire, choix de trois hauteurs autres que celle de la paire puis choix d'une carte dans chacune de ces trois hauteurs). On obtient :

$$P(B) = \binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3 \Big/ \binom{32}{5} = 107\,520/201\,376 \simeq 0.53$$

Avec le même type de décomposition, on obtient :

$$P(C) = \binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{2}\binom{4}{1}^2 \Big/ \binom{32}{5} = 10\,752/201\,376 \simeq 0.053$$

$$P(D) = A_8^2\binom{4}{3}\binom{4}{2} \Big/ \binom{32}{5} = 1\,344/201\,376 \simeq 0.0067$$

$$P(E) = \binom{8}{2}\binom{4}{2}^2\binom{24}{1} \Big/ \binom{32}{5} = 24\,192/201\,376 \simeq 0.12$$

$$P(F) = \binom{4}{1}\binom{4}{1}^5 \Big/ \binom{32}{5} = 4\,096/201\,376 \simeq 0.02$$

(choix de la hauteur maximale parmi quatre possibles puis choix d'une carte dans chacune des cinq hauteurs de la quinte).