INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES

(Version naïve)

A - LOGIQUE ET ENSEMBLES

B - FONCTIONS ET APPLICATIONS

C - RELATIONS D'ORDRE ET D'EQUIVALENCE

D - STRUCTURES ALGEBRIQUES

Jeanne FINE, IUFM de Toulouse

Ce polycopié a été utilisé dans le cadre d'un stage de rentrée en 1ère année de DEUG MASS à l'Université de Toulouse le Mirail entre 1982 et 1990. Il s'adresse donc à des étudiants qui viennent d'obtenir un bac scientifique et qui souhaitent poursuivre des études en mathématiques. Il constitue un préalable incontournable pour un étudiant qui souhaite devenir professeur de mathématiques.

Les notions introduites ici seront reprises dans un cadre plus rigoureux par différents formateurs au cours de la préparation au CAPES de mathématiques.

Merci de me signaler les imprécisions ou erreurs que vous trouverez.

jeanne.fine@toulouse.iufm.fr

Ensembles de nombres

Ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Ensemble des nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

Ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{ a \times 10^n \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

Ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = = \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \right\}$

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$,

$\mathbb{Q}_+ = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x \geq 0 \right\}$,

$\mathbb{Q}_+^* = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x > 0 \right\}$, etc.

Ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} = \left]-\infty, +\infty\right[$

représenté par la droite numérique : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$,

$\mathbb{R}_+ = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq 0 \right\} = \left[0, +\infty\right[$, etc.

On a la suite d'inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

A - LOGIQUE ET ENSEMBLES

1. LES ASSERTIONS

1.1. Définitions

Une *assertion* est un énoncé pour lequel on peut dire s'il est vrai ou faux ; la valeur de vérité d'une assertion est notée "V" si l'assertion est vraie et "F" si l'assertion est fausse. Une assertion vraie est appelée *proposition*.

Attention au vocabulaire : dans beaucoup d'ouvrages une "assertion" est appelée "proposition" et une "assertion vraie" est appelée "tautologie" ou "théorème". Le calcul sur les assertions présenté ici est donc aussi appelé calcul sur les propositions ou calcul propositionnel.

Exemples : "$1 \leq 2$" est une assertion vraie
"$x \leq 2$" n'est pas une assertion, mais devient une assertion quand on remplace x par un nombre réel.
"il existe au moins un nombre premier pair" est une assertion vraie.
"tous les nombres réels négatifs sont inférieurs à 2" est une assertion vraie.

1.2. Opérations sur les assertions

A partir d'une assertion "p" on construit une autre assertion appelée "non p" dont la valeur de vérité est donnée dans la table suivante :

p	non p
V	F
F	V

A partir de deux assertions "p" et "q", on construit les assertions "p et q", "p ou q", "p implique q" (notée $p \Rightarrow q$), "p équivalente à q" (notée $p \Leftrightarrow q$) dont, pour chacune, la valeur de vérité est donnée par la table suivante selon les quatre cas possibles de valeur de vérité de "p" et de "q" (deux premières colonnes).

p	q	p et q	p ou q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

non, et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sont appelés des *opérations logiques*.

A partir d'une ou plusieurs assertions "p", "q", "r" et des opérations logiques, on peut construire de nouvelles assertions dont on peut trouver la valeur de vérité (en fonction des valeurs de vérité des assertions composantes) à l'aide de tables de vérité.

Exemple : "p et (non p)" est une assertion fausse quelle que soit la valeur de vérité de "p".

p	non p	p et (non p)
V	F	F
F	V	F

1.3. Tautologies

Les assertions suivantes sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité de "p", "q", "r". Elles sont appelées des *propositions* ou *théorèmes* ou *tautologies*.

non (non p) $\Leftrightarrow$ p ; (p et p) $\Leftrightarrow$ p ; (p ou p) $\Leftrightarrow$ p ; p ou (non p) ; non [p et (non p)]

(p $\Rightarrow$ q) $\Leftrightarrow$ [(non p) ou q] (propriété fondamentale de l'implication)

[(p $\Rightarrow$ q) et (q $\Rightarrow$ p)] $\Leftrightarrow$ (p $\Leftrightarrow$ q) (propriété fondamentale de l'équivalence)

[(p $\Rightarrow$ q) $\Leftrightarrow$ [(non q) $\Rightarrow$ (non p)] (raisonnement par contraposition)

(p $\Rightarrow$ q) $\Leftrightarrow$ {[p et (non q)] $\Rightarrow$ [p et (non p)]} (raisonnement par l'absurde)

non (p et q) $\Leftrightarrow$ [(non p) ou (non q)]

non (p ou q) $\Leftrightarrow$ [(non p) et (non q)]

[(p et q) et r] $\Leftrightarrow$ [p et (q et r)] noté "p et q et r"

[(p ou q) ou r] $\Leftrightarrow$ [p ou (q ou r)] noté "p ou q ou r"

[(p $\Rightarrow$ q) et (q $\Rightarrow$ r)] $\Rightarrow$ (p $\Rightarrow$r)

[(p $\Leftrightarrow$ q) et (q $\Leftrightarrow$ r)] $\Rightarrow$ (p $\Leftrightarrow$ r) noté p $\Leftrightarrow$ q $\Leftrightarrow$ r

[p et (q ou r)] $\Leftrightarrow$ [(p et q) ou (p et r)]

[p ou (q et r)] $\Leftrightarrow$ [(p ou q) et (p ou r)]

[p et (p $\Rightarrow$ q)] $\Rightarrow$ q

1.4. Remarques

1/ On utilise souvent l'abus de langage suivant : on dit "on a p" au lieu de dire "p est vraie".
2/ Lorsqu'on veut montrer qu'une implication (p $\Rightarrow$ q) est vraie, (p est l'hypothèse, q la conclusion), il suffit de montrer que, si p est vraie, alors q est vraie (puisque si p est fausse, l'implication p $\Rightarrow$ q est vraie).
3/ L'implication (q $\Rightarrow$ p) est appelée *réciproque* de l'implication (p $\Rightarrow$ q)
4/ L'implication ((non q) $\Rightarrow$ (non p)) est appelée *contraposée* de l'implication (p $\Rightarrow$ q).

1.5. Egalité de deux assertions

Deux assertions composées P et Q sont égales si, quelles que soient les valeurs de vérité des assertions qui la composent, l'équivalence entre ces deux assertions est une tautologie, c'est-à-dire :

P = Q si, par définition, P $\Leftrightarrow$ Q est une tautologie.

On n'utilisera pas l'égalité d'assertions dans la suite.

1.6. Condition nécessaire et suffisante

Les différentes formulations d'une condition nécessaire et suffisante sont présentées ci-après.

Implication :

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p est une condition suffisante pour q		q est une condition nécessaire pour p

Si on a p, alors on a nécessairement q. Pour avoir p il est nécessaire d'avoir q. **q est une condition nécessaire pour p.** Si on n'a pas q, alors on n'a pas p, c'est-à-dire ((non q) $\Rightarrow$ (non p)).

On a p seulement si on a q. Il est suffisant d'avoir p pour avoir q. **p est une condition suffisante pour q.**

Equivalence :

$$\boxed{p \Leftrightarrow q}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{condition nécessaire}}}{p \Rightarrow q} \quad \text{et} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{condition suffisante}}}{q \Rightarrow p}$$

q est une **condition nécessaire et suffisante** pour p.
Pour avoir p, il est nécessaire et suffisant d'avoir q.
On a q **si et seulement si** on a p.

1.7. Exercices

Calculer la valeur de vérité des assertions suivantes en fonction des valeurs de vérité des assertions qui les composent et dire quelles sont celles qui sont des tautologies.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \text{ et } q) \Leftrightarrow p)$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \text{ ou } q) \Leftrightarrow q)$

$\{[\text{non } (p \text{ et } q)] \text{ et } [\text{non } (p \text{ et } r)]\} \text{ ou } p$

$[p \text{ ou } (q \text{ et non } r)] \text{ et } [q \text{ ou } (r \text{ et non } p)] \text{ et } [r \text{ ou } (p \text{ et non } q)]$

$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$; attention à l'abus d'écriture : $(p \Rightarrow q \Rightarrow r)$ pour $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$

2. LES ENSEMBLES

2.1. Notion d'ensemble

C'est une notion a priori, évoquée de façon intuitive par une collection d'objets.

Exemples : l'ensemble E des lettres de l'alphabet, l'ensemble F des nombres pairs.

Notation : $E = \{a, b, c, ..., z\}$, $F = \{0, 2, 4, 6, ... \} = \{2n \mid n \in \mathbb{N} \}$

2.2. Appartenance

Les objets d'un ensemble sont appelés *éléments* de l'ensemble ; si a est un élément de E on dit que a *appartient à E* et on note $a \in E$; si a n'est pas un élément de E on dit que *a n'appartient pas à E* et on note $a \notin E$.
Il existe un ensemble n'ayant aucun élément ; il est appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$.

2.3. Partie (ou sous-ensemble) d'un ensemble E

Définition : on appelle *partie* ou *sous-ensemble* d'un ensemble E tout ensemble A dont tous les éléments appartiennent à E.
Si A est un sous-ensemble de E, on dit que *A est inclus dans E* et on note $A \subset E$; si A n'est pas un sous-ensemble de E on dit que *A n'est pas inclus dans E* et on note $A \not\subset E$.

Par convention on a : $\emptyset \subset E$

Ensemble des parties de E

Définition : il existe un ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de E, il est appelé *ensemble des parties de E* et noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemples :
E = {a} $\mathcal{P}$(E) = {∅, E}
E = {a, b} $\mathcal{P}$(E) = {∅, {a}, {b}, E}
E = {a, b, c} $\mathcal{P}$(E) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, E}
Remarque : soit E = {a, b}, on a : a ∈ E, {a} ⊂ E, {a} ∈ $\mathcal{P}$(E).

2.4. Egalité d'ensembles

Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E, on dit que A et B sont égaux et on note A = B si A et B possèdent les mêmes éléments, c'est-à-dire si on a : A ⊂ B et B ⊂ A.

Remarque : Le mot "si" utilisé pour une définition correspond donc à "si et seulement si".

3. LES PREDICATS

3.1. Définition : Soit E un ensemble, tout énoncé vrai pour certains éléments de E et faux pour les autres est appelé *prédicat* défini sur E.

Notation : un prédicat défini sur E est noté A(x), B(x), C(x), ... A, B, C désignent alors les propriétés que x peut ou non vérifier.

Exemple : "x est un nombre pair" est un prédicat sur ℕ , "être un nombre pair" est la propriété.

3.2. Quantificateurs

Soit A(x) un prédicat défini sur un ensemble E (par exemple "x est un nombre pair" sur ℕ)
Si, dans A(x), on remplace x par un élément spécifié de E, on obtient une assertion, par exemple "3 est un nombre pair" est une assertion.

D'autre part l'énoncé "tout élément de E possède la propriété A" est une assertion.
On formule cette assertion de la manière suivante : "quelque soit x (élément) de E, on a A(x)" ou "pour tout (élément) x de E, on a A(x) et on la note : (∀x ∈ E) A(x).

De même l'énoncé "il existe au moins un élément de E possédant la propriété A" est une assertion.
On la formule "il existe (au moins) un (élément) x de E tel que A(x)" et on la note : (∃ x ∈ E) A(x).

∀ et ∃ sont appelés des *quantificateurs*.

Exemples : (∀x ∈ ℕ) x est pair ; (∃ x ∈ ℕ) x est pair.

3.3. Opérations sur les prédicats

Soit E un ensemble sur lequel sont définis des prédicats A(x), B(x), ..., on peut construire à l'aide des opérations logiques "non", "et", "ou", "⇒", "⇔" d'autres prédicats définis sur E ; par exemple :
non A(x), A(x) et B(x), A(x) ou B(x), A(x) ⇒ B(x), A(x) ⇔ B(x), non (A(x) et B(x)), A(x) et (B(x) ⇒ C(x)), etc.

On a vu qu'une tautologie est une assertion vraie quelles que soient les valeurs de vérité des assertions p, q, r, ... qui la composent.
Si on remplace p, q, r, ..., par A(x), B(x), C(x), ..., prédicats définis sur E, on obtient un énoncé vrai pour tout x de E.
Exemples : (∀x∈E) [(A(x) ⇒ B(x)) ⇔ (non B(x) ⇒ non A(x))] est une assertion vraie. De même :
∀x ∈ E) [A(x) ou (non A(x))] est une assertion vraie.

Enfin les assertions suivantes sont aussi vraies :
non $[(\forall x \in E)\ A(x)] \Leftrightarrow [(\exists\ x \in E$ non $A(x)]$ (démonstration par contre-exemple)
non $[\exists\ x \in E)\ A(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in E)$ non $A(x)]$

4. ENSEMBLES ET PRÉDICATS

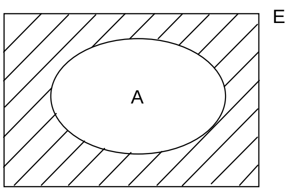
4.1. Ensemble de vérité d'un prédicat.

Soit $A(x)$ un prédicat défini sur E. Tous les éléments x de E pour lesquels $A(x)$ est une assertion vraie constituent un sous-ensemble A de E appelé ensemble de vérité du prédicat $A(x)$.
Notation : $A = \{x \in E \mid A(x)\}$
Exemple : le prédicat "x est un nombre pair" défini sur $\mathbb{N}$ a pour ensemble de vérité le sous-ensemble des nombres pairs de $\mathbb{N}$; si on le note F, on peut écrire :
$F = \{0, 2, 4, ...\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un nombre pair}\}$

4.2. Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble, A, B, C, ..., des sous-ensembles de E, on a :
Inclusion et implication : $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Egalité et équivalence : $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Construction d'ensembles.
Le complémentaire par rapport à E de A est le sous-ensemble, noté $C_E A$ ou $\overline{A}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur le référentiel E, des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

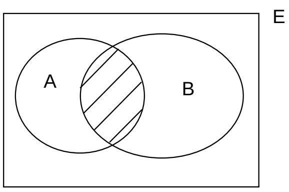


$C_E A = \{x \in E \mid x \notin A\} = \{x \in E \mid \text{non } (x \in A)\}$

partie hachurée du schéma : $C_E A$

On a : $C_E (C_E A) = A$, $C_E \varnothing = E$, $C_E E = \varnothing$

L'intersection de A et B est le sous-ensemble, noté $A \cap B$, des éléments de E appartenant à la fois à A et B.

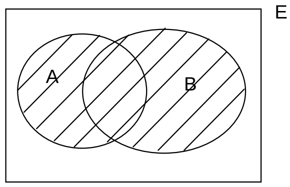


$A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \text{ et } (x \in B)\}$

partie hachurée du schéma : $A \cap B$

On a :
$A \cap B = B \cap A$, $A \cap A = A$, $A \cap E = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap C_E A = \varnothing$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont *disjoints*.

La réunion de A et de B est le sous-ensemble, noté $A \cup B$, des éléments de E appartenant au moins à l'un des deux sous-ensembles A et B.



$A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$

partie hachurée du schéma : $A \cup B$

On a :
$A \cup B = B \cup A$, $A \cup A = A$, $A \cup E = E$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup C_E A = E$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
De plus : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ } Lois de Morgan
$C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

4.3. Exercice

Soit E un ensemble, A(x), B(x), ..., des prédicats définis sur E, d'ensembles de vérité respectifs A, B, ..., montrer que l'on a :
$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ A(x) \Rightarrow B(x)$
$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ A(x) \Leftrightarrow B(x)$
$(\forall x \in E)\ (x \in A \Leftrightarrow A(x))$ car $A = \{x \in E \mid A(x)\}$
$(\forall x \in E)\ (x \in C_E A \Leftrightarrow \text{non } A(x))$ i.e. $C_E A = \{x \in E \mid \text{non } A(x)\}$
$(\forall x \in E)\ (x \in A \cap B \Leftrightarrow A(x) \text{ et } B(x))$ i.e. $A \cap B = \{x \in E \mid A(x) \text{ et } B(x)\}$
$(\forall x \in E)\ (x \in A \cup B \Leftrightarrow A(x) \text{ ou } B(x))$ i.e. $A \cup B = \{x \in E \mid A(x) \text{ ou } B(x)\}$

5. EXERCICES

Seuls ont été définis les prédicats à une seule variable x, bien que nous utilisions souvent les prédicats de plusieurs variables x, y, z, ... ; par exemple, dans l'exercice 1/, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est un prédicat de 2 variables A et B, chacune définie sur $\mathcal{P}(E)$.

1/ Soit E un ensemble de plus de 2 éléments. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E) \quad \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E) \quad \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

2/ *Démonstration par récurrence*
La démonstration par récurrence repose sur l'équivalence des deux assertions suivantes (A(n) est un prédicat défini sur $\mathbb{N}$).
$(\forall n \in \mathbb{N})\ A(n)$ et $A(0)$ et $[(\forall n \in \mathbb{N})\ (A(n) \Rightarrow A(n+1))\}$
Ex : Montrer : $(\forall n \in N)\ (3^{2n} - 2^n$ divisible par 7)

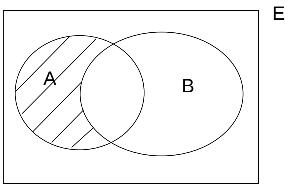
3/ Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (A et B sont des sous-ensembles de E).
$A \subset B$, $(C_E A) \cup B = E$, $A \cap (C_E B) = \varnothing$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$

4/ Simplifier l'écriture des ensembles suivants (A, B et C sont des sous-ensembles d'un ensemble E).
$A \cap (A \cup B)$, $A \cup (A \cap B)$, $A \cap ((C_E A) \cup B)$, $(A \cup B) \cup (A \cap C_E B) \cup (C_E A \cap B)$

5/ *Différence d'ensembles, différences symétriques d'ensembles*.

Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E

Définition : l'ensemble A \ B (lire "A moins B") est l'ensemble des éléments de E appartenant à A et n'appartenant pas à B, c'est-à-dire : $A \setminus B = A \cap C_E B$



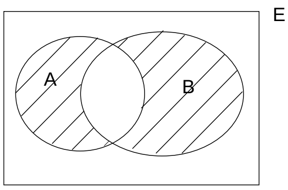
partie hachurée du partie schéma : A \ B

On a :

$E \setminus A = C_E A$, $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$, $\varnothing \setminus A = \varnothing$, $A \setminus E = \varnothing$

Définition : l'ensemble A Δ B (lire "A delta B") est l'ensemble des éléments de E appartenant à A \ B ou à B \ A, c'est-à-dire : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$.

A Δ B est appelée *différence symétrique* de A et de B.



partie hachurée du schéma : A Δ B

On a : $A \Delta B = B \Delta A$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $A \Delta A = \varnothing$

$A \Delta \varnothing = A$, $A \Delta E = C_E A$, $C_E(A \Delta B) = A \Delta (C_E B) = (C_E A) \Delta B$

Montrer que, si A, B et C sont des sous-ensembles de E, on a :

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

6/ Soit E un ensemble, A(x) et B(x) deux prédicats définis sur E, d'ensemble de vérité respectif A et B.

Déterminer les ensembles de vérité des prédicats suivants :

A(x) et B(x) , A(x) ⇒ B(x) , A(x) ⇔ B(x) , (non A(x)) et B(x) ,

((non A(x)) et B(x)) ou (A(x) et (non B(x)))

Déterminer les ensembles suivants :

{x ∈ E | (A(x) et B(x)) ou B(x)} , {x ∈ E | A(x) et (A(x) ou B(x))}

Déterminer les assertions sur les ensembles équivalentes aux assertions suivantes :

(∀x ∈ E) A(x) , (∀x ∈ E) non B(x) , (∀x ∈ E) A(x) et B(x) , (∀x ∈ E) A(x) ou B(x),

(∀x ∈ E) A(x) ⇒ B(x), (∀x ∈ E) A(x) ⇔ B(x), (∀x ∈ E) (non A(x)) et B(x),

(∀x ∈ E) ((non A(x)) et B(x)) ou (A(x) et (non B(x)))

(∀x ∈ E) (non A(x)) ou B(x) , (∀x ∈ E) non (A(x) ⇔ B(x)) ,

(∀x ∈ E) non (A(x) ou B(x)) , (∀x ∈ E) non (A(x) et B(x))

7/ *Partition d'un ensemble*

Définition : un ensemble de parties de E réalise une *partition de E* si :

1/ les parties sont non vides

2/ deux quelconques de ces parties sont disjointes

3/ la réunion de toutes ces parties est l'ensemble E.

Exemple : E = {a, b, c, d}, F={{a, c}, {b}, {d}} réalise une partition de E.

Montrer que, si {A, B, C, D} réalise une partition d'un ensemble E, alors {A, B ∪ C, D} réalise une partition de l'ensemble E.

Trouver d'autres partitions de E.

Si A, B, C sont des sous-ensembles de E, trouver à partir de ces ensembles la partition de E contenant le plus d'ensembles (on dit que c'est la partition la plus fine de E).

6. PRODUIT CARTÉSIEN D'ENSEMBLES - RELATIONS BINAIRES

La présentation de relation binaire peut être légèrement différente (cf. par exemple, Lelong-Ferrand et Arnaudies, Tome 1 Algèbre, Dunod).

6.1. Couples et n-uplets

Un couple est la donnée de deux éléments a et b ordonnés, noté (a, b).
Un n-uplet est la donnée de n éléments $a_1, ..., a_n$ ordonnés, noté $(a_1 ,..., a_n)$.

Egalité de couples et de n-uplets.
$[(a, b) = (a' ,b')] \Leftrightarrow [(a = a') \text{ et } (b = b')]$
$[(a_1 , ..., a_n) = (b_1 , ..., b_n)] \Leftrightarrow [(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})\ a_i = b_i]$

6.2. Produit cartésien d'ensembles

$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \text{ et } (b \in B)\}$
$A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1, ..., a_n) \mid \forall i \in \{1, ..., n\}\ a_i \in A_i\}$

Exemples : si $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ alors
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
$A^3 = A \times A \times A = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, b)\}$

6.3. Relation binaire

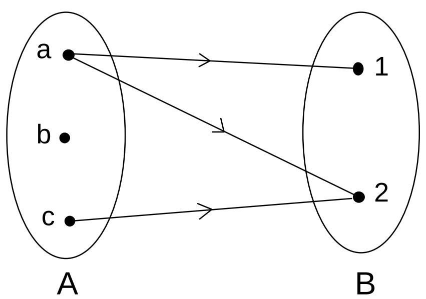
Une relation binaire R est un triplet (A, B, G) où A et B sont deux ensembles appelés respectivement *ensemble de départ* et *ensemble d'arrivée* et où G est une partie de A×B appelée *graphe* de la relation.

Exemple : $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2\}$ $G = \{(a, 1), (a, 2), (c, 2)\}$

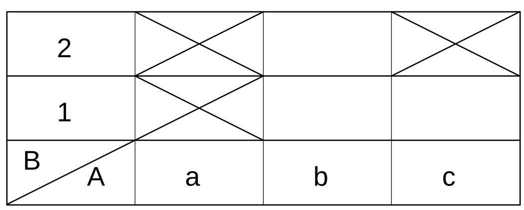
On dit que les éléments x de A et y de B sont associés par la relation R (et on note x R y ou R(x, y)) si $(x, y) \in G$; on a donc $G = \{(x, y) \in A \times B \mid R(x, y)\}$.
Une relation binaire est donc un prédicat à deux variables, défini sur A×B, d'ensemble de vérité G (graphe de la relation).
On obtient des assertions à partir de ce prédicat en spécifiant les variables ou en utilisant les quantificateurs.

Exercice.
A partir de l'exemple ci-dessus, dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et écrire leur négation :
$(\forall x \in A)\ (\exists\ y \in B)\ R(x, y)$, $(\forall y \in B)\ (\exists\ x \in A)\ R(x, y)$, $(\exists\ x \in A)\ (\exists\ y \in B)\ R(x, y)$,
$(\exists\ y \in B)\ (\forall x \in A)\ R(x, y)$, $(\exists\ x \in A)\ (\forall y \in B)\ R(x, y)$, $R(b, 2)$, $R(a, 2)$.

6.4. Représentations graphiques



Représentation sagittale



Représentation cartésienne

Remarque : 2 relations binaires (A, B, G) et (A′, B′, G′) sont égales si et seulement si A = A′, B = B′ et G = G′.

6.5. Relation réciproque

Soit R = (A, B, G) et soit $G^{-1} = \{(y, x) \in B \times A) \mid (x, y) \in G\}$ (lire "G moins 1").
La relation réciproque de R , notée R^{-1}, est $R^{-1} = (B, A, G^{-1})$.

B - FONCTIONS ET APPLICATIONS

La présentation de "fonctions et applications" peut être légèrement différente (cf. par exemple, Lelong-Ferrand et Arnaudies, Tome 1 Algèbre, Dunod).

1. FONCTIONS ET APPLICATIONS

1.1. Définition.

Une *fonction* f de A vers B est une relation binaire d'ensemble de départ A et d'ensemble d'arrivée B telle qu'à tout élément de A est associé *au plus un* (i.e. 1 ou 0) élément de B.

Si un élément x de A est associé à un élément y de B, cet élément y est noté f(x) ; on dit que f(x) est *l'image* de x par f et que x est *un antécédent* de f(x) par f.

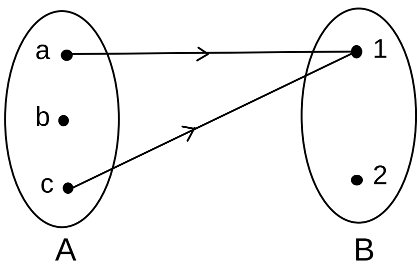
L'ensemble D des éléments de A qui ont une image par f est appelé *ensemble de définition* de f. On dit que f est définie sur D et prend ses valeurs dans B.

1.2. Définition.

Une *application* f de A vers B est une fonction définie sur A tout entier (i.e. telle que D = A).

1.3. Exemple.

f = (A, B, G) avec A = {a, b, c} , B = {1, 2} et G = {(a, 1), (c, 1)}



1 = f(a)
1 = f(c)

2			
1	X		X
B \ A	a	b	c

D = {a, c} (D, B, G) est une application.

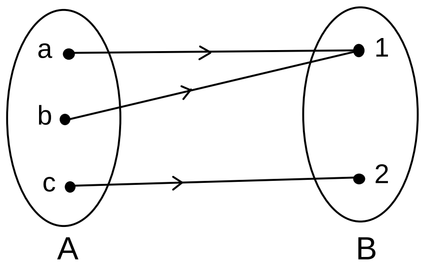
1.4. Remarques

1. Soit f une application de A vers B et g une application de A' vers B'.
   f = g si et seulement si A = A', B = B', et $\forall x \in A$ f(x) = g(x)
2. Deux applications f et g de même ensemble de départ A et de même ensemble d'arrivée B sont égales si et seulement si : $(\forall x \in A)$ f(x) = g(x)

2. SURJECTION, INJECTION, BIJECTION

2.1. Définition.

Une application de A vers B est *surjective* (ou est une *surjection*) si tout élément y de B est l'image d'au moins un élément x de A, i.e. $(\forall y \in B)\ (\exists\, x \in A)\ \ y = f(x)$.
Exemple : A = {a, b, c} B = {1, 2} G = {(a, 1), (b, 1), (c, 2)}

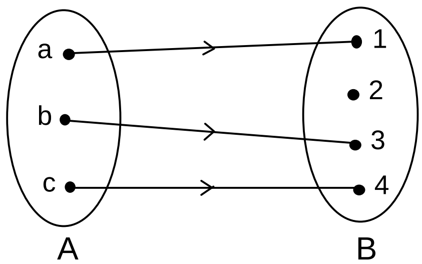


2			X
1	X	X	
B \ A	a	b	c

2.2. Définition

Une application f de A vers b est *injective* (ou est une *injection*) si deux quelconques éléments distincts de A ont des images distinctes, i.e. $(\forall(x, x') \in A^2)\ [(x \neq x') \Rightarrow f(x) \neq f(x')]$ ou encore :
$(\forall(x, x') \in A^2)\ [f(x) = f(x') \Rightarrow (x = x')]$.

Exemple : A = {a, b, c} B = {1, 2, 3, 4} G = {(a, 1), (b, 3), (c, 4)}

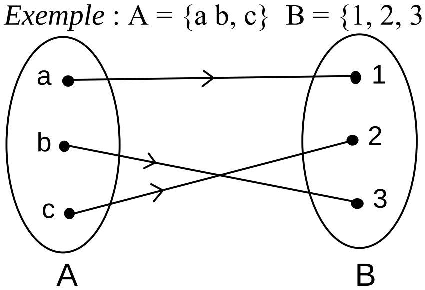


4			X
3		X	
2			
1	X		
B \ A	a	b	c

Propriété. Une application f de A vers B est injective si et seulement si tout élément y de B est l'image d'au plus un élément x de A.

2.3. Définition

Une application de A vers B est *bijective* (ou est une *bijection*) si elle est injective et surjective.
Exemple : A = {a b, c} B = {1, 2, 3} G = {(a, 1), (b, 3), (c, 2)}



3		X	
2			X
1	X		
B \ A	a	b	c

Propriété. Une application f de A vers B est bijective si et seulement si tout élément y de B est l'image d'un élément x de A et d'un seul.

Remarques :
1/ La relation réciproque d'une application quelconque n'est pas en général une application.
2/ La relation réciproque d'une bijection est une application qui est bijective, on la note f^{-1}.

3. COMPOSITION D'APPLICATIONS

Définition

Soit f une application de A vers B et g une application de B vers C ; à tout élément x de A on sait associer un élément unique y de B tel que y = f(x) et, à cet élément y de B, on sait associer un élément unique z de C tel que z = g(y).
On définit ainsi une application de A vers C, notée $g \circ f$, qui, à tout x de A, associe g[f(x)] dans C.

Exemple : f = (A, B, C) avec A = {a, b} B = {1, 2, 3} G = {(a, 1), (b, 3)}

$g = \{B, C, H\}$ avec $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $H = \{(1, \beta), (2, \beta), (3, \alpha)\}$
alors $g \circ f = (A, C, K)$ avec $K = \{(a, \beta), (b, \alpha)\}$.

Une autre écriture de ces trois applications est :

$$f : A \to B \qquad g : B \to C \qquad g \circ f : A \to C$$
$$a \to 1 \qquad 1 \to \beta \qquad a \to \beta$$
$$b \to 3 \qquad 2 \to \beta \qquad b \to \alpha$$
$$3 \to \alpha$$

avec $A = \{a, b\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Remarque : si f est une application de A vers b et g une application de C vers D, pour que $g \circ f$ soit définie, il suffit que l'on ait B = C, pour que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient simultanément définies, il suffit que l'on ait : B = C et A = D.

4. EXERCICES

1/ On décide qu'un chiffre de l'ensemble A (A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}) est en relation avec un nombre de l'ensemble B (B = {17, 32, 70, 64, 55}) si ce chiffre est utilisé pour écrire ce nombre.
Déterminer G ; faire les représentations sagittale et cartésienne de cette relation ; cette relation est-elle une fonction ? une application ? une injection ? une surjection ? une bijection ?

2/ Dans chacun des cas suivants faire une représentation cartésienne de l'application, dire si c'est une injection, une surjection, une bijection ; le cas échéant, déterminer la bijection réciproque.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \to x+7 \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x \to x^2 \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2 \qquad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \to x^2$$

3/ Soit E un ensemble non vide et f l'application définie par :

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$$
$$A \to C_E A$$

Montrer que f est une bijection ; déterminer la bijection réciproque.

4/ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \to (2x+y, x-y)$
Montrer que f est une bijection ; déterminer la bijection réciproque.

5/ Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer les bijections réciproques.

$$f : \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}-\{1\},\ x \to \frac{x+1}{x-2} \qquad f : \mathbb{R}^+ \to]-\infty, 2],\ x \to 2-x^2 \qquad f : \mathbb{R}^+-\{1\} \to]-\infty, -1[\cup [0, \infty[,\ x \to \frac{x^2}{1-x^2}$$

6/ On appelle *<u>fonction numérique</u>* une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. Pour toute fonction numérique f, définie sur un ensemble E et tout λ de $\mathbb{R}$, on définit la fonction numérique λf par :

$$\lambda f : E \to \mathbb{R}$$
$$x \to \lambda f(x)$$

Pour tout couple de fonctions numériques (f, g), chacune définie sur E, on définit les fonctions numériques f+g et fg par :

$$f+g : E \to \mathbb{R},\ x \to f(x)+g(x) \qquad fg : E \to \mathbb{R},\ x \to f(x)g(x)$$

Une ***fonction numérique d'une variable réelle*** est une fonction numérique dont l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$). Exemple : les fonctions définies à l'exercice 5.

Soit E un ensemble non vide ; pour toute partie A de E on définit la ***fonction indicatrice*** de A, notée 1_A, par :

$1_A : E \to \{0, 1\}$

$x \to 1$ si $x \in A$

$x \to 0$ si $x \notin A$

Montrer que : $(\forall (A, B) \in [\mathcal{P}(E)]^2)$ $[(1_A = 1_B) \Leftrightarrow (A = B)]$
On note 1 (resp. 0) l'application constante qui, à tout x de E, associe le nombre 1 (resp. 0).
Soit A et B deux sous-ensembles de E.
Ecrire $1_{C_E A}$, $1_{A\cap B}$, $1_{A\cup B}$, $1_{A\Delta B}$ en fonction de 1_A et 1_B.
Ecrire une assertion sur les ensembles équivalente à $1_A\, 1_B = 1_A$.
Ecrire une assertion sur les indicatrices de A et de B équivalente à $A\cup B = B$.
Soit $\{A_i\ ; i \in I\}$ une partition finie de E. Simplifier $\sum_{i\in I} 1_{A_i}$ et $\prod_{i\in I} 1_{A_i}$

7/ Tracer dans un même repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ les graphes des fonctions réelles d'une variable réelle, f et g, où, pour tout x de $\mathbb{R}$, f(x) est la partie entière de x (notée [x]) et où $g = \sum_{n\in \mathbb{Z}} n\, 1_{[n,n+1[}$.

8/ Soit X l'application qui, à chaque étudiant d'une salle, associe son âge (en années révolues). Si Ω désigne l'ensemble de ces étudiants et si pour tout n de $\mathbb{N}$, A_n est le sous-ensemble de Ω des étudiants ayant n ans, écrire X à partir des indicatrices des ensembles A_n, $n \in \mathbb{N}$.

9/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 2x+3$ $\quad x \to x^2$
Déterminer $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$.

10/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $\quad h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$
$x \to x+6$ $\quad x \to x^2$ $\quad x \to -x$
Déterminer $h\circ(g\circ f)$ et $(h\circ g)\circ f$.

11/ Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \to 2x$ $\quad x \to \dfrac{x}{2}$ si x est pair
$x \to \dfrac{x+1}{2}$ si x est impair.
Les applications f et g sont-elles bijectives ? Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

12/ Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G.
a/ Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
b/ Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
c/ En déduire que, si G = E, si $g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F$ (I désignant l'application identique), alors f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

13/ ***Image directe et image réciproque d'ensemble par une application***

Soit f une application de E vers F, A et A′ des sous-ensembles de E, B et B′ des sous-ensembles de F. On appelle *image directe de A par f* et on note f(A) le sous-ensemble de F défini par :
$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ (ou encore $f(A) = \{y \in F \mid (\exists\, x \in A)\ y = f(x)\}$).
On appelle *image réciproque de B par f* et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par :
$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
Montrer :
$(A \subset A') \Rightarrow (f(A) \subset f(A'))$
$f(A \cap A') \subset (f(A) \cap f(A'))$ et égalité si f est injective
$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
$(B \subset B') \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$ et réciproquement si f est surjective
$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
$f^{-1}(C_F B) = C_E f^{-1}(B)$
$f^{-1}(f(A)) \supset A$ et égalité si f est injective
$f(f^{-1}(B)) \subset B$ et égalité si f est surjective

14/ ***Puissance d'un ensemble***

Le nombre d'éléments d'un ensemble renvoie à la notion de "cardinal".
Définitions.
Deux ensembles A et B ont *même puissance* (ou sont *équipotents*) s'il existe une bijection de A vers B ; A est un *ensemble fini* si A est vide ou s'il existe un entier naturel non nul n tel que A soit équipotent à $\{1, 2, ..., n\}$; n est alors unique et est appelé *cardinal* de A. Par convention le cardinal de l'ensemble vide est 0.
Un ensemble ayant un seul élément est appelé un *singleton* ; un ensemble ayant deux éléments est appelé *paire*.
Un ensemble qui n'est pas fini est un *ensemble infini*.
Un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$ est dit *dénombrable* (ou infini dénombrable). Un ensemble fini ou dénombrable est dit *au plus dénombrable*.
Propriétés.
Un ensemble infini peut être équipotent à l'un de ses sous-ensembles (exemple : $\mathbb{N}$ et le sous-ensemble des nombres pairs).
Une réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.
La puissance de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (et celle de tout intervalle ouvert non vide de R) est supérieure à la puissance du dénombrable (elle est appelée *puissance du continu*).
Un ensemble E a toujours une puissance strictement inférieure à celle de l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ a la puissance du continu.

15/ ***Dénombrement*** (ou ***Analyse combinatoire***).

Soit E un ensemble fini de p éléments et F un ensemble fini de n éléments.
1. Quel est le nombre d'applications de E vers F ?
2. Quel est le nombre de p-uplets formés d'éléments de F (appelés aussi *p-listes*) ?
3. Quel est le nombre d'injections de E vers F ($p \le n$) ?
4. Quel est le nombre de p-uplets formés d'éléments distincts de F ($p \le n$) (appelés aussi *arrangements de n éléments p à p*) ? Ce nombre est noté A_n^p.

   Une bijection d'un ensemble vers lui-même est appelée une *permutation*.
5. Quel est le nombre de permutations de E ?
6. Quel est le nombre de sous-ensembles (ou parties) de F de p éléments ($p \le n$) (appelés aussi *combinaisons de n éléments p à p*) ? Ce nombre est noté $\binom{n}{p}$ ou C_n^p.

   Notation factorielle : $p! = p\,(p-1)\,(p-2)\,...\times 2\times 1$ ($p \in \mathbb{N}^*$).
   Par convention : $0! = 1$

7. Montrer : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

8. Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \le n$, on a :
$C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p$ $(p \ge 1)$.
Cette dernière relation permet de construire pas à pas le triangle de Pascal.
Triangle de Pascal

n	C_n^0	C_n^1			C_{n-1}^{p-1}	C_n^p
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
...						
n–1					C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p
n						C_n^p
...						

9. Utiliser le triangle de Pascal pour donner la valeur de C_7^3 et C_7^4.

10. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^p + ... + C_n^n = 2^n$.

11. Pour tout n de N* et tout p de N* tels que p<n, on pose :
$S(n, p) = 1\times2\times...\times(p-1) + 2\times3\times...\times p + ... + (n-p+1)\times...\times(n-2)\times(n-1)$
Montrer : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + ... + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$.

En déduire : $S(n, p) = \dfrac{1}{p} n(n-1)...(n-p+1)$.

Calculer S(n, 2) ; S(n, 3) ; $\sum_{k=1}^n k^2$; $\sum_{k=1}^n k^3$.

16/ ***Jeu de Poker***.
On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes ce qui constitue une "main". Combien y a-t-il de mains possibles ?
Combien y a-t-il de mains contenant une paire (deux cartes de la même hauteur) ?
Combien y a-t-il de mains contenant une double paire (deux paires) ?
Combien y a-t-il de mains contenant un brelan (trois cartes de la même hauteur) ?
Combien y a-t-il de mains contenant un full (une paire et un brelan) ?
Combien y a-t-il de mains contenant un carré (quatre cartes de la même hauteur) ?
Combien y a-t-il de mains contenant une quinte (cinq cartes dont les hauteurs sont consécutives) ?

17/ ***Restriction, corestriction et prolongement d'une application***
Définitions :
Soit f une application de E vers F, A une partie de E et B une partie de F contenant f(E).
La *restriction de f à A*, notée $f_{|A}$, est l'unique application définie par : $f_{|A} : A \to F$
$x \to f_{|A}(x) = f(x)$
La *corestriction de f à B*, notée $f^{|B}$, est l'unique application définie par : $f^{|B} : E \to B$
$x \to f^{|B}(x) = f(x)$
Soit g une application de A vers F, A étant une partie de E.
Un *prolongement de g à E* est une application $f : E \to F$ telle que $f_{|A} = g$ (non unicité du prolongement).

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à *x* associe $E(\frac{x}{3} - 2)$, E désignant la partie entière de x.

Ecrire à l'aide d'indicatrices la corestriction g de f à $f(\mathbb{R})$, la restriction h de g à]0, 10[, un prolongement de h à [0, 10].

18/ ***Suite de nombres réels***

Définition : une application définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée suite de nombre réels.

$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\quad n \to u(n)$

L'image de n, u(n), est notée u_n et la suite est notée u ou (u_n).

Ne pas confondre (u_n) et $u(\mathbb{N})$ $(= \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset F)$ qui est l'ensemble image de $\mathbb{N}$ par u.

Exercice

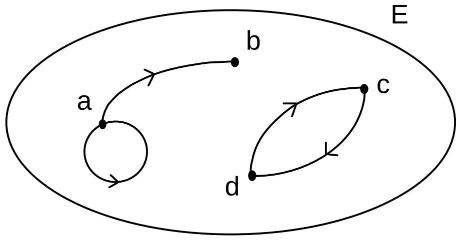
Soit $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $u(\mathbb{N})$.

C - RELATIONS D'ORDRE ET D'ÉQUIVALENCE

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire de E sur lui-même.

Exemple : $E = \{a, b, c, d\}$ $G = \{(a, a), (a, b), (c, d), (d, c)\}$.

En plus des représentations sagittales et cartésiennes déjà vues, on utilisera une autre représentation sagittale.



1. DÉFINITIONS

$\mathcal{R}$ est dite ***réflexive*** si $(\forall x \in E)\ x\mathcal{R}x$

$\mathcal{R}$ est dite ***symétrique*** si $(\forall (x, y) \in E^2)\ [(x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)]$

$\mathcal{R}$ est dite ***antisymétrique*** si $(\forall (x, y) \in E^2)\ \{[(x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}x)] \Rightarrow (y = x)\}$

$\mathcal{R}$ est dite ***transitive*** si $(\forall (x, y, z) \in E^3)\ \{[(x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}z)] \Rightarrow (x\mathcal{R}z)\}$

$\mathcal{R}$ est dite ***une relation d'ordre*** sur E si $\mathcal{R}$ est reflexive, antisymétrique et transitive.

Notation : $x\mathcal{R}y$ est alors notée $x \prec y$ ou $x \leq y$.

L'ordre est ***total*** si $(\forall (x, y) \in E^2)\ \{[(x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x)]$, sinon l'ordre est ***partiel***.

$\mathcal{R}$ est une ***relation d'équivalence sur E*** si $\mathcal{R}$ est reflexive, symétrique et transitive.

Notation : $x\mathcal{R}y$ est alors notée $x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}$ (lire "x est congru à y modulo $\mathcal{R}$ ")

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence et a un élément de E.

Par définition la ***classe d'équivalence de a*** est l'ensemble , noté Cl(a), des éléments équivalents à a, i.e.:

$Cl(a) = \{x \in E \mid a\mathcal{R}x\}$

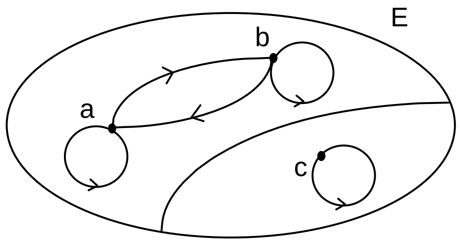
L'ensemble des classes d'équivalence réalise une partition de E. Cet ensemble est appelé ***ensemble quotient de E par*** $\mathcal{R}$ et noté $E/\mathcal{R}$.

2. EXEMPLES

1/ Reprenons l'exemple ci-dessus.
   $\mathcal{R} = (E, E, G)$ $E = \{a, b, c, d\}$ $G = \{(a, a), (a, b), (c, d), (d, c)\}$
   $\mathcal{R}$ non reflexive car non $(b\mathcal{R}b)$
   $\mathcal{R}$ non symétrique car $(a\mathcal{R}b)$ et [non $(b\mathcal{R}a)$]
   $\mathcal{R}$ non antisymétrique car $(c\mathcal{R}d)$ et $(d\mathcal{R}c)$ et $(c \neq d)$
   $\mathcal{R}$ non transitive car $(c\mathcal{R}d)$ et $(d\mathcal{R}c)$ et [non $(c\mathcal{R}c)$]

2/ $\mathcal{R} = (E, E, G)$ $E = \{a, b, c, d\}$ $G = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c)\}$
   $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur E.

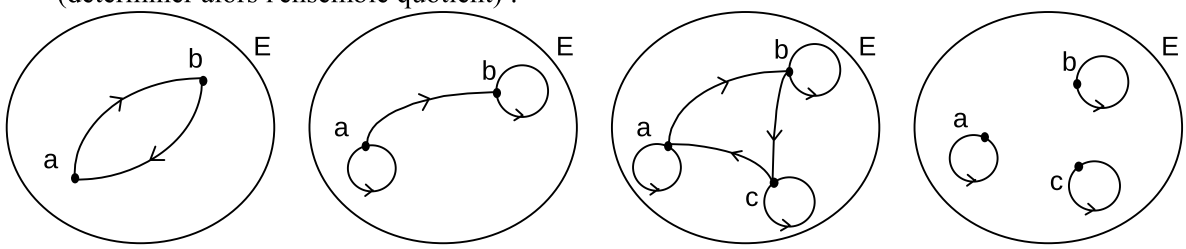
3/ $\mathcal{R} = (E, E, G)$ $E = \{a, b, c\}$ $G = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$



R est une relation d'équivalence sur E.
On a 2 classes d'équivalence $\{a, b\}$ et $\{c\}$, donc
$E/R = \{\{a, b\}, \{c\}\}$
$Cl(a) = Cl(b) = \{a, b\}$ et $Cl(c) = \{c\}$

3. EXERCICES

1/ Dire dans chacun des cas suivants si la relation est réflexive, transitive, symétrique, antisymétrique, si c'est une relation d'ordre total ou partiel, si c'est une relation d'équivalence (déterminer alors l'ensemble quotient) :



2/ Dire dans chacun des cas suivants $(R, <)$, $(R, >)$, $(R, \leq)$, $(R, \geq)$ si la relation est une relation d'ordre et, le cas échéant, si l'ordre est total ou partiel.

3/ Dans R^2 on considère la relation d'ordre définie par :

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ si } (a < a') \text{ ou } [(a = a') \text{ et } (b \leq b')]$$

Montrer que R est une relation d'ordre total.

4/ Dans $\mathbb{N}^*$ on considère la relation "a divise b". Montrer que c'est une relation d'ordre partiel.

5/ Soit E un ensemble ayant plus de deux éléments. Dans $\mathcal{P}(E)$ on considère la relation "$A \subset B$". Montrer que c'est une relation d'ordre partiel.

6/ Dans $\mathbb{N}^2$ on considère la relation définie par : $(a, b)R(a', b')$ si $a+b' = b+a'$.
Montrer que R est une relation d'équivalence. Déterminer $\mathbb{N}^2/R$.

7/ Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ on considère la relation définie par : $(a, b)R(a', b')$ si $ab' = a'b$.
Montrer que R est une relation d'équivalence. Déterminer $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*/R$.

8/ Soit n un entier naturel. On note $n\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{n\,m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
On considère la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par : xRy si $x-y \in n\mathbb{Z}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. On l'appelle *congruence modulo n* et on note $x \equiv y \pmod{n}$. L'ensemble $\mathbb{Z}/R$ est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer cet ensemble.

9/ Une relation R sur E est dite circulaire si $\forall(x, y, z) \in E^3$ $\{[(xRy) \text{ et } (yRz)] \Rightarrow (zRx)\}$.
Montrer que R est réflexive et circulaire si et seulement si R est une relation d'équivalence.

10/ Soit R une relation binaire sur E.
Montrer que la relation R définie sur E par xRy si [(xRy) et (yRx)] est symétrique. A quelle condition est-elle réflexive ?

11/ Soit R et R ′ deux relations d'équivalence sur un même ensemble E. On considère sur E les relations $\uparrow$ et $\downarrow$ définies par : $x\uparrow y$ si $[(xRy) \text{ et } (xR'y)]$ et $x\downarrow y$ si $[(xRy) \text{ ou } (xR'y)]$.
Que peut-on dire de ces relations et de leurs graphes ?

12/ Soit R et R′ deux relations d'équivalence sur un ensemble E. On dit que R est "plus fine" que R′ et on note R≤R ′ si $(\forall(x, y) \in E^2)$ $[(xRy) \Rightarrow (xR'y)]$.
Montrer que la relation "plus fine que" est une relation d'ordre sur l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E.
Monter que R est plus fine que R′ si et seulement si toute classe modulo R′ est une réunion de classes modulo R .

13/ ***Décomposition canonique d'une application.***
On considère une application f d'un ensemble E vers un ensemble F. Soit R la relation définie sur E par :xRx′ si f(x) = f(x′). Montrer que c'est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient peut s'écrire : $E/R = \{f^{-1}(\{y\})\,;\, y \in f(E)\}$ et est appelé *partition de E engendrée par l'application f.*

Soit $s: E \to E/R$, $x \to Cl(x)$; $b: E/R \to f(E)$, $Cl(x) \to f(x)$; $i: f(E) \to F$, $y \to y$

Vérifier que s est surjective, b bijective, i injective et que l'on a : $f = i \circ b \circ s$. Cette décomposition est appelée *décomposition canonique de l'application* f.
Donner les décompositions canoniques des fonctions réelles d'une variable réelle suivantes :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sin(x)$; $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \cos(x)$; $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to tg(x)$

14/ Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
Intervalles de $\mathbb{R}$: soit a et b deux réels tels que : $a \le b$; on définit alors les intervalles]a, b[,]a, b], [a, b[, [a, b] ,]a, →) , (←, a[, [a, →) , (←, a].
La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est définie par : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Extension de $\overline{\mathbb{R}}$ pour la structure d'ordre : on pose $(\forall x \in R)$ $-\infty < x < +\infty$.
On a deux cas d'indétermination : $\infty-\infty$; $0 \times \infty$.
Les intervalles de $\mathbb{R}$:]a, →) , (←, a[, ... sont notés respectivement :]a, +∞[,]–∞, a[, etc.

15/ Soit (E, ≤) un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

Définitions.
1/ $M \in E$ est un *majorant de A* si $\forall a \in A$, $a \le M$.
$m \in E$ est un *minorant de A* si $\forall a \in A$, $m \le a$.

2/ $\alpha \in E$ est *plus grand élément de A* si $\alpha \in A$ et α majore A, on note α = Max a.
$\beta \in E$ est *plus petit élément de A* si $\beta \in A$ et β minore A, on note β = Min b.

3/ $S \in E$ est *borne supérieure de A* si S est le plus petit des majorants de A, on note S = Sup A.
$I \in E$ est *borne inférieure de A* si I est le plus grand des minorants de A, on note I = Inf A.

Propriétés.
1/ Unicité - du plus grand (resp. du plus petit) élément de A (quand il existe).
- de la borne supérieure (resp. inférieure) de A (quand elle existe).

2/ α plus grand élément de A $\Rightarrow$ α borne supérieure de A.
β plus petit élément de A $\Rightarrow$ β borne inférieure de A.

3/ $S = \mathrm{Sup}A \Leftrightarrow (\forall a \in A)\ (a \le S)$ et
$(\forall x \in E), (x < S) \Rightarrow (\exists\, a \in A)\ (x < a)$

$I = \mathrm{Inf}A \Leftrightarrow (\forall a \in A)\ (I \le a)$ et
$(\forall x \in E), (x > I) \Rightarrow (\exists\, a \in A)\ (a < x)$

Définitions.
1/ A est *majoré* dans E si A admet au moins un majorant dans E.
2/ A est *minoré* dans E si A admet au moins un minorant dans E.
3/ A est *borné* dans E si A est majoré et minoré dans E.

Exercice.
Dans chacun des cas suivants dire si l'ensemble A admet un majorant dans E (resp. un minorant dans E, resp. une borne supérieure, resp. une borne inférieure, resp. un plus grand élément, resp. un plus petit élément) :
$(E, \leq) = (\mathbb{R}, \leq)$ $\quad A =]-3, -2] \cup \{0\}$
$(E, \leq) = (\mathbb{R}, \leq)$ $\quad A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$
$(E, \leq) = (\mathbb{Q}, \leq)$ $\quad A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 1\}$
$(E, \leq) = (\mathbb{Q}, \leq)$ $\quad A = \{x \in \mathbb{Q}_+^* \mid x^2 \leq 2\}$

D - STRUCTURES ALGÉBRIQUES

1. LOI DE COMPOSITION INTERNE

Définition : Soit E un ensemble. Une *loi de composition interne* (ou *opération interne*) sur E est une application de $E \times E$ dans E.

Notation : une opération interne est notée $*$, $\top$, $\times$, $\cdot$, $\circ$, etc, et l'image par $*$ de l'élément (a, b) de E^2 est notée $a*b$.

Définitions : soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une opération interne $*$.
(C) L'opération $*$ est *commutative* si $(\forall (a, b)\in E^2)$ $(a*b = b*a)$
(A) L'opération $*$ est *associative* si $(\forall (a, b, c)\in E^3)$ $a*(b * c) = (a*b)*c$
(N) Il existe un *élément neutre* e pour $*$ si $(\exists\, e\in E)$ $(\forall a\in E)$ $(a*e = e*a = a)$
(S) Les *éléments symétriques* existent pour $*$ si $(\forall a\in E)$ $(\exists\, a'\in E)$ $(a*a' = a'*a = e)$

Soit $(E, *, \top)$ un ensemble muni de deux opérations internes $*$ et $\top$.
(D) L'opération $\top$ est *distributive* par rapport à $*$ si :
$\forall (a, b, c)\in E^3$ $[(a*b)\top c = (a\top c)*(b\top c)]$ et $[c\top(a*b)] = (c\top a)*(c\top b)]$

Exemples :
$(\mathbb{N}, +, \times)$
+ est commutative, associative, 0 est élément neutre pour +, aucun élément n'a de symétrique sauf 0.
$\times$ est commutative, associative, distributive par rapport à +, 1 est élément neutre pour $\times$, aucun élément n'a de symétrique sauf 1.
$(\mathbb{Z}, +, \times)$: + C A N S (le symétrique de a est $-a$ et est appelé *opposé* de a)
$\times$ C A N D (aucun élément n'a de symétrique sauf 1)
$(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$: + C A N S
$\times$ C A N $S_{\text{sauf } 0}$ D (tout élément a non nul a pour symétrique $\frac{1}{a}$ (ou a^{-1}), appelé *inverse* de a)

2. STRUCTURE DE GROUPE, ANNEAU, CORPS.

Définitions.

$(E, *)$ est	un <u>*groupe*</u>	si $*$ ANS
	un groupe commutatif (ou abélien)	si $*$ CANS
$(E, *, \top)$	un <u>*anneau*</u>	si $*$ CANS et $\top$ A D
	un anneau unitaire	si $*$ CANS et $\top$ AN D
	un anneau commutatif	si $*$ CANS et $\top$ C A D
	un anneau commutatif et unitaire	si $*$ CANS et $\top$ C AN D
	un <u>*corps*</u>	si $*$ CANS et $\top$ ANSD (S sauf le neutre de $*$)
	un corps commutatif	si $*$ CANS et $\top$ C ANSD (S sauf le neutre de $*$)

Exemples : $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien ; $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire ; $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.

Remarque : un groupe est nécessairement non vide puisqu'il contient le neutre de l'opération.

3. LOI DE COMPOSITION EXTERNE À DOMAINE D'OPÉRATEUR K

Définition : Soit K un ensemble et E un autre ensemble. Une loi de composition externe (ou opération externe) sur E à domaine d'opérateurs K est une application de $K \times E$ dans E.
Notation : cette opération est souvent notée $\cdot$ et l'image par $\cdot$ d'un élément (λ, a) de $K \times E$ notée $\lambda \cdot a$.

4. STRUCTURE DE K-ESPACE VECTORIEL

Définition : soit $(E, +, \cdot)$ un ensemble E muni d'une opération interne + et d'une opération externe à domaine d'opérateurs un <u>corps</u> commutatif K ; $(E, +, \cdot)$ est un <u>*K-espace vectoriel*</u> si $(E, +)$ est un groupe abélien et si on a :

$\forall (a, b) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in K^2$
1/ $\lambda.(a+b)=\lambda.a+\lambda.b$
2/ $(\lambda+\mu).a=\lambda.a+\mu.a$
3/ $\lambda.(\mu.a)=(\lambda\mu).a$
4/ $1 \cdot a = a$

Exemple : $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ avec :
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (a', b') \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$ et $\lambda.(a,b)=(\lambda.a,\lambda.b)$.
$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5. HOMOMORPHISMES

Soit $(G, *)$ et $(G', \top)$ deux groupes, f une application de G dans G′ est un <u>*homomorphisme de groupe*</u> si
$(\forall (a, b) \in G^2)$ $(f(a*b) = f(a) \top f(b))$

Soit $(G, *, \top)$ et $(G', \circ, \perp)$ deux anneaux (resp. deux corps), f une application de G dans G′ est un <u>*homorphisme d'anneau*</u> (resp. de corps) si :
$(\forall (a, b) \in G^2)$ $[(f(a*b) = f(a) \circ f(b)]$ et $[f(a \top b) = f(a) \perp f(b)]$

Soit (E, +, $\cdot$) et (E′, $*$, $\times$) deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif K, f une application de E dans E′ est un ***homomorphisme de K-espace vectoriel*** (ou une *application linéaire*) si :
$(\forall(a, b)\in E^2)$, $(\forall\lambda\in R)$ $[f(a+b) = f(a)*f(b)]$ et $[f(\lambda \cdot a) = \lambda\times f(a)]$

Exemple : $f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \to (2x+y, x-y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

6. EXERCICES

1/ Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer que $A\Delta(B\Delta C)$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent exclusivement à l'une ou aux trois parties A, B, C.
Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif unitaire.
Ecrire les opérations $\cup$, C_E, \ en fonction de Δ et $\cap$.

2/ On définit dans $\mathbb{R}$ l'opération : $a*b = a+b+ab$.
Montrer que $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ est un groupe pour $*$. Résoudre dans ce groupe $a*x = b$.

3/ Soit les six applications de $\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ dans lui-même :

$$f_1 : x \to x \qquad f_2 : x \to \frac{1}{1-x} \qquad f_3 : x \to 1-\frac{1}{x}$$

$$f_4 : x \to \frac{1}{x} \qquad f_5 : x \to 1-x \qquad f_6 : x \to \frac{x}{x-1}$$

Montrer que l'ensemble de ces applications est un groupe pour la loi de composition $\circ$. En donner la table. Ce groupe est-il commutatif ?

4/ Soit (G, $\cdot$) un groupe, E un ensemble quelconque, f une application bijective de E sur G.
On définit sur E l'opération $x*y = f^{-1}(f(x)\cdot f(y))$. Montrer que (E, $*$) est un groupe.
On définit sur $\mathbb{R}_+$ l'opération $x*y = \sqrt[20]{x^{20}+y^{20}}$. Montrer que $(\mathbb{R}_+, *)$ est un groupe.

5/ Soit (G, $\cdot$) un groupe tel que tout élément de G soit son propre symétrique. Montrer que G est commutatif.

6/ Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ où $\forall(a, b)\in \mathbb{R}^2$, $\forall(a', b')\in \mathbb{R}^2$
$(a, b) + (a', b') = (a+a', b+b')$ $(a, b) \times (a', b') = (aa'-bb', ab'+a'b)$ est un corps commutatif.
Soit $S = \{(a, 0) \mid a\in \mathbb{R}\}$. Montrer que S est stable pour + et $\times$.
Montrer que S est un sous-corps de $(\mathbb{R}^2, +, \times)$.
Soit φ l'application de S dans $\mathbb{R}$ qui à (a, 0) associe a. Montrer que φ est un isomorphisme (c'est-à-dire un homomorphisme bijectif) de corps.
On identifie (a, 0) et a ($a\in \mathbb{R}$) et on pose : (0, 1) = i. On a alors (a, b) = a + bi.

7/ On définit sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n\in \mathbb{N}^*$) l'addition et la multiplication par :
$Cl(x) + Cl(y) = Cl(x + y)$ et $Cl(x)\, Cl(y) = Cl(x\, y)$.
Montrer que ces opérations sont bien définies ; quelle est la nature de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$?
Pour n = 2, n = 3 et n = 4 dresser les tables d'opération.