Arbre de dénombrement et arbre de probabilité

Plan du document

1. On présente tout d'abord la règle du produit pour les arbres de dénombrement avec, en cas particulier, le cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis.

2. On présente ensuite une proposition : l'équiprobabilité à chaque étape entraîne l'équiprobabilité sur l'ensemble des résultats.

3. On applique cette proposition à l'échantillonnage dans une population finie (approche sondage) : échantillon de taille 2 à probabilité égale avec remise puis sans remise.

4. Pour les échantillonnages de l'exemple 3, on utilise une autre modélisation à l'aide de probabilités conditionnelles et d'arbres de probabilité.

5. Illustration des paragraphes 3 et 4 dans le cas d'une population de taille 3 ; arbre de dénombrement, arbre de probabilité et tableau présentant la distribution de probabilité conjointe et les deux distributions marginales des deux tirages.

1. Règle du produit (pour les arbres de dénombrement)

Si une expérience comporte K étapes avec, pour chaque étape k, $k \in [\![1, K]\!]$, n_k résultats possibles (n_k ne dépendant que de l'étape k) alors le nombre total de résultats possibles est $\prod_{k=1}^{K} n_k$.

Preuve
Par récurrence sur K
Pour $K = 2$
Soit $\{a_i\ ; i \in [\![1, n_1]\!]\}$ l'ensemble des résultats de la 1ère étape et, $\forall i \in [\![1, n_1]\!]$, $\{b_{i,j}\ ; j \in [\![1, n_2]\!]\}$ l'ensemble des résultats de la 2ème étape correspondant au résultat a_i de la 1ère étape.
L'ensemble des résultats de l'expérience s'écrit : $\Omega = \left\{\left(a_i, b_{i,j}\right);\ i \in [\![1, n_1]\!],\ j \in [\![1, n_2]\!]\right\}$ et on a : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_1} \Omega_i$ avec $\Omega_i = \left\{\left(a_i, b_{i,j}\right);\ j \in [\![1, n_2]\!]\right\}$. Les $\left(\Omega_i\right)_{i \in [\![1, n_1]\!]}$ sont 2 à 2 disjoints et de même cardinal n_2. On en déduit par le lemme du berger $card(\Omega) = n_1 \times n_2$, d'où le résultat pour $K = 2$.
On suppose la propriété vérifiée au rang K.
On désigne par a_i, $i \in [\![1, N]\!]$, les résultats des K premières étapes, avec $N = \prod_{k=1}^{K} n_k$ d'après l'hypothèse de récurrence et, $\forall i \in [\![1, N]\!]$, par $b_{i,j}$, $j \in [\![1, n_{K+1}]\!]$ les résultats de l'étape $K + 1$ correspondant au résultat des K premières étapes désigné par a_i.
L'ensemble des résultats de l'expérience s'écrit : $\Omega = \left\{\left(a_i, b_{i,j}\right);\ i \in [\![1, N]\!],\ j \in [\![1, n_{K+1}]\!]\right\}$ et la preuve faite pour $K = 2$ permet de conclure.

Cas particulier. Cardinal d'un espace produit d'ensembles finis.

Dans le cas où, pour tout *k* de $[\![1, K]\!]$, l'ensemble des résultats de l'étape *k* est un ensemble fini A_k de cardinal n_k, alors l'ensemble des résultats de l'expérience est le produit cartésien $A_1 \times ... \times A_K$, ensemble fini de cardinal $\prod_{k=1}^{K} n_k$.

2. Equiprobabilité sur l'ensemble des résultats si équiprobabilité à chaque étape

Proposition (cadre probabiliste)

Si une expérience aléatoire comporte *K* étapes avec, pour chaque étape *k*, ($k \in [\![1, K]\!]$), n_k résultats possibles équiprobables (n_k ne dépendant que de l'étape *k*) alors le nombre total de résultats possibles est $\prod_{k=1}^{K} n_k$ et ils sont équiprobables.

Preuve

Le résultat concernant le dénombrement des résultats possibles est déjà démontré. Il reste à prouver que, si l'on a équiprobabilité à chaque étape, alors on a équiprobabilité sur l'ensemble des résultats. On raisonne par récurrence sur *K*.

Pour *K* = 2

On reprend les notations utilisées précédemment. L'univers associé à l'expérience aléatoire est $\Omega = \left\{ \left(a_i, b_{i,j} \right);\ i \in [\![1, n_1]\!],\ j \in [\![1, n_2]\!] \right\}$. L'événement "obtenir le résultat a_i à la première étape puis $b_{i,j}$ à la deuxième étape" s'écrit $\left\{ \left(a_i, b_{i,j} \right) \right\}$ et l'événement "obtenir le résultat a_i à la première étape" s'écrit $\Omega_i = \left\{ \left(a_i, b_{i,j} \right);\ j \in [\![1, n_2]\!] \right\}$.

Par hypothèse, pour tout *i* de $[\![1, n_1]\!]$, les n_2 événements élémentaires $\left\{ \left(a_i, b_{i,j} \right) \right\}$, $j \in [\![1, n_2]\!]$, sont équiprobables. On note p_i la probabilité commune à ces n_2 événements. On a alors, pour tout i de $[\![1, n_1]\!]$, $P(\Omega_i) = n_2 p_i$ puisque Ω_i est la réunion de ces événements élémentaires (évidemment 2 à 2 incompatibles).

Par hypothèse, les n_1 événements Ω_i, $i \in [\![1, n_1]\!]$, sont équiprobables. On note *q* la probabilité commune à ces n_1 événements. On a donc, pour tout *i* de $[\![1, n_1]\!]$, $q = n_2 p_i$.

Les n_1 événements Ω_i sont 2 à 2 incompatibles et forment une partition de Ω.

On en déduit : $1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n_1} P(\Omega_i) = n_1 q$ d'où $q = \dfrac{1}{n_1}$ et, pour tout i de $[\![1, n_1]\!]$, $p_i = \dfrac{q}{n_2} = \dfrac{1}{n_1 n_2}$. Les $n_1 n_2$ événements élémentaires $\left\{ \left(a_i, b_{i,j} \right) \right\}, i \in [\![1, n_1]\!],\ j \in [\![1, n_2]\!]$, sont équiprobables. La suite de la démonstration par récurrence est évidente.

3. Application au tirage successif à probabilité égale avec remise et sans remise

On tire "au hasard" (c'est-à-dire avec équiprobabilité) successivement et avec remise (resp. sans remise) deux boules d'une urne contenant *n* boules numérotées de 1 à *n*.
Pour tout *i* de $[\![1, n]\!]$, on note A_i (resp. B_i) l'événement "obtenir la boule *i* au premier tirage" (resp. "obtenir la boule *i* au deuxième tirage").

Proposition

Que le tirage soit avec ou sans remise, on a, pour tout *i* de $[\![1, n]\!]$, $P\left(A_i\right) = \frac{1}{n}$ et $P\left(B_i\right) = \frac{1}{n}$.
Dans le cas du tirage avec remise, on a, pour tout *i* de $[\![1, n]\!]$ et tout *j* de $[\![1, n]\!]$, $P\left(A_i \cap B_j\right) = \frac{1}{n^2}$; les événements A_i et B_j sont indépendants en probabilité.
Dans le cas du tirage sans remise, on a pour tout *i* de $[\![1, n]\!]$ et tout *j* de $[\![1, n]\!]$, $P\left(A_i \cap B_j\right) = \frac{1}{n\left(n-1\right)}$ si $i \neq j$, 0 sinon ; les événements A_i et B_j ne sont pas indépendants en probabilité.

Preuve

Dans le cas d'un *tirage avec remise*, l'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \left\{\left(i, j\right);\ i \in [\![1, n]\!],\ j \in [\![1, n]\!]\ \right\}$; on a $card(\Omega) = n^2$ (cas particulier de la règle du produit pour le cardinal d'un ensemble produit) et chaque événement élémentaire a la même probabilité $1/n^2$ (proposition ci-dessus).
Pour tout *i* de $[\![1, n]\!]$ et tout *j* de $[\![1, n]\!]$, on a : $A_i = \left\{(i, j) ;\ j \in [\![1, n]\!]\right\}$, $B_j = \left\{(i, j) ; i \in [\![1, n]\!]\right\}$ et $A_i \cap B_j = \left\{\left(i, j\right)\right\}$, de cardinal *n*, *n* et 1 respectivement.
On en déduit : pour tout *i* de $[\![1, n]\!]$ et tout *j* de $[\![1, n]\!]$, $P\left(A_i\right) = \frac{1}{n}$, $P\left(B_j\right) = \frac{1}{n}$, $P\left(A_i \cap B_j\right) = \frac{1}{n^2}$ et le résultat annoncé.

Dans le cas d'un *tirage sans remise*, l'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \left\{\left(i, j\right);\ i \in [\![1, n]\!],\ j \in [\![1, n]\!] \setminus \left\{i\right\}\ \right\}$; on a $card(\Omega) = n(n-1)$ (règle du produit pour un arbre de dénombrement) et chaque événement élémentaire a la même probabilité : 1/*n*(*n*-1) (proposition ci-dessus).
Pour tout *i* de $[\![1, n]\!]$ et tout *j* de $[\![1, n]\!]$, on a :

- $A_i = \left\{(i, j) ;\ j \in [\![1, n]\!] \setminus \left\{i\right\}\right\} = \bigcup_{j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}} \left\{(i, j)\right\}$, $B_j = \left\{(i, j) ; i \in [\![1, n]\!] \setminus \left\{j\right\}\right\} = \bigcup_{i \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}} \left\{(i, j)\right\}$ et $A_i \cap B_j = \left\{\left(i, j\right)\right\}$ si $i \neq j$, $\varnothing$ sinon ;
- $card(A_i) = n-1$, $card(B_j) = n-1$ (règle de la somme pour un arbre de dénombrement) et $card(A_i \cap B_j) = 1$ si $i \neq j$, 0 sinon ;
- $P(A_i) = \frac{1}{n}$, $P(B_j) = \frac{1}{n}$ et $P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ si $i \neq j$, 0 sinon.

Comme on a : $P(A_i)P(B_j)=\frac{1}{n^2}$, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ et tout j de $[\![1,n]\!]$; les événements A_i et B_j, $i\in[\![1,n]\!]$, $j\in[\![1,n]\!]$, ne sont pas indépendants en probabilité.

4. Modélisation avec les probabilités conditionnelles

Au lieu d'utiliser la proposition ci-dessus, on peut modéliser les deux tirages en utilisant les probabilités conditionnelles et les arbres de probabilités (arbres pondérés).
On utilise les mêmes notations que ci-dessus pour l'ensemble des résultats possibles et pour les événements A_i et B_i, $i\in[\![1,n]\!]$.

Dans le cas du *tirage avec remise*, on a, par hypothèse : pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $P(A_i)=\frac{1}{n}$ et pour tout j de $[\![1,n]\!]$ $P_{A_i}(B_j)=\frac{1}{n}$. On en déduit, pour tout pour tout i de $[\![1,n]\!]$ et tout j de $[\![1,n]\!]$ $P\left(\{(i,j)\}\right)=P(A_i\cap B_j)=P\left(A_i\right)P_{A_i}\left(B_j\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}$ (règle du produit pour un arbre pondéré). On retrouve l'équiprobabilité des événements élémentaires.
Enfin on en déduit : pour tout j de $[\![1,n]\!]$, $P\left(B_j\right)=\sum_{i\in[\![1,n]\!]}P(A_i\cap B_j)=\sum_{i\in[\![1,n]\!]}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$ (règle de la somme pour un arbre pondéré).

Dans le cas du *tirage sans remise*, on a, par hypothèse : pour tout i d e$[\![1,n]\!]$, $P(A_i)=\frac{1}{n}$ et pour tout j de $[\![1,n]\!]$, $P_{A_i}(B_j)=\frac{1}{n-1}$ si $j\neq i$, 0 sinon.
On en déduit, pour tout pour tout i de $[\![1,n]\!]$ et tout j de $[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, $P\left(\{(i,j)\}\right)=P(A_i\cap B_j)=P\left(A_i\right)P_{A_i}\left(B_j\right)=\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n\left(n-1\right)}$ (règle du produit pour un arbre pondéré). On retrouve l'équiprobabilité des événements élémentaires.
Enfin on en déduit : pour tout j de $[\![1,n]\!]$, $P\left(B_j\right)=\sum_{i\in[\![1,n]\!]}P(A_i\cap B_j)=\sum_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}$ (règle de la somme pour un arbre pondéré).

5. *Arbre de dénombrement et arbre de probabilité - Exemple*

On tire "au hasard" (c'est-à-dire avec équiprobabilité) successivement et avec remise (resp. sans remise) deux boules d'une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3.
Pour tout *i* de $\{1,2,3\}$, on note A_i (resp. B_i) l'événement "obtenir la boule *i* au premier tirage" (resp. "obtenir la boule *i* au deuxième tirage").

Proposition

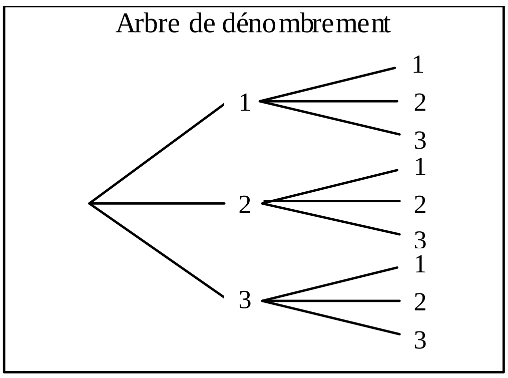
Que le tirage soit avec ou sans remise, on a, pour tout *i* de $\{1,2,3\}$, $P(A_i)=\frac{1}{3}$ et $P(B_i)=\frac{1}{3}$.
Dans le cas du tirage avec remise, on a, pour tout *i* de $\{1,2,3\}$ et tout *j* de $\{1,2,3\}$, $P(A_i \cap B_j)=\frac{1}{9}$; les événements A_i et B_j sont indépendants en probabilité.
Dans le cas du tirage sans remise, on a pour tout *i* de $\{1,2,3\}$ et tout j de $\{1,2,3\}$, $P(A_i \cap B_j)=\frac{1}{6}$ si $i \neq j$, 0 sinon ; les événements A_i et B_j ne sont pas indépendants en probabilité.

Preuves

Que ce soit pour le tirage avec remise ou le tirage sans remise,
- on peut utiliser un *arbre de dénombrement* pour lister l'ensemble des résultats possibles et utiliser la proposition selon laquelle l'équiprobabilité à chaque tirage entraîne l'équiprobabilité sur l'ensemble des résultats des tirages successifs (cette proposition est admise à tous les niveaux d'enseignement secondaire)
- on peut utiliser l'information fournie sous forme de probabilité conditionnelle (*arbre de probabilité*) et en déduire la probabilité des événements élémentaires.

Tirage avec remise

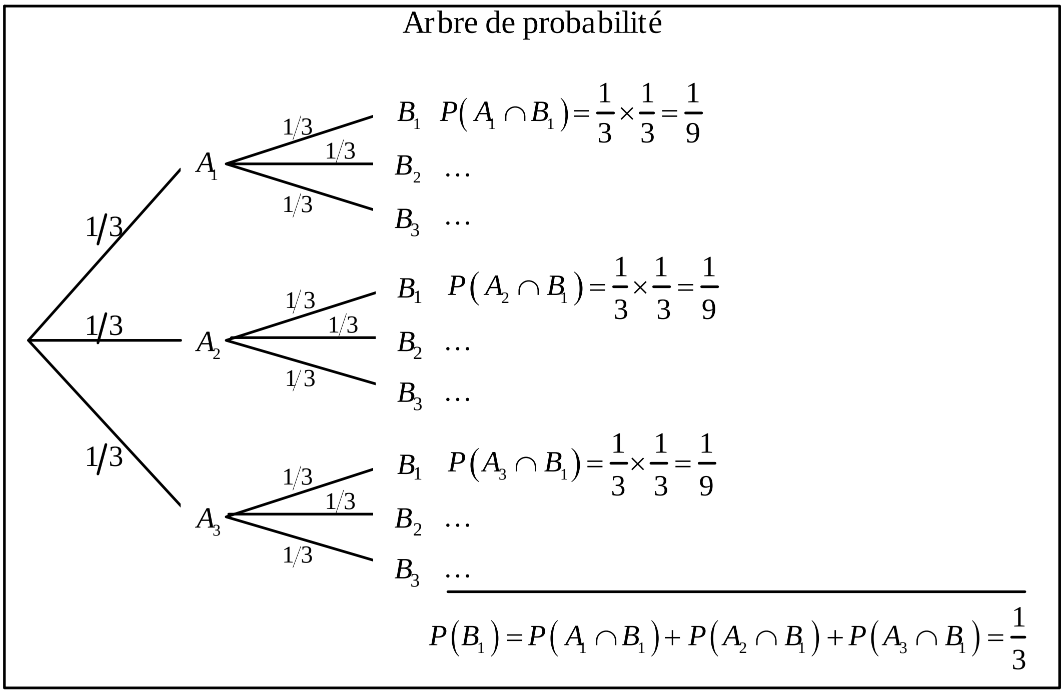
- **Arbre de dénombrement**



$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ et P est l'équiprobabilité sur Ω.
On a pour tout *i* de $\{1,2,3\}$ et tout j de $\{1,2,3\}$:
$A_i=\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$, $B_j=\{(1,j),(2,j),(3,j)\}$, $A_i \cap B_j=\{(i,j)\}$

dont on déduit : $P(A_i)=\frac{1}{3}$, $P(B_j)=\frac{1}{3}$ et $P(A_i \cap B_j)=\frac{1}{9}$ et le résultat sur l'indépendance.

- **Arbre de probabilité**



On a par hypothèse, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $P(A_i)=\frac{1}{3}$ et pour tout j de $\{1,2,3\}$ $P_{A_i}(B_j)=\frac{1}{3}$.
On en déduit, pour tout pour tout i de $\{1,2,3\}$ et tout j de $\{1,2,3\}$ $P(\{(i,j)\})=P(A_i \cap B_j)=P(A_i)P_{A_i}(B_j)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ (règle du produit pour un arbre pondéré). On retrouve l'équiprobabilité des événements élémentaires.
Enfin on en déduit : pour tout j de $\{1,2,3\}$, $P(B_j)=\sum_{i\in\{1,2,3\}} P(A_i \cap B_j)=\sum_{i\in\{1,2,3\}}\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$ (règle de la somme pour un arbre pondéré).

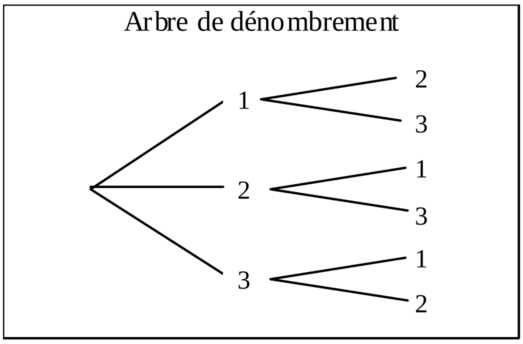
- **Tableau : distribution de probabilité conjointe et de distributions marginales des résultats des premier et deuxième tirages**

2° tirage / 1er tirage	B_1	B_2	B_3	
A_1	**1/9**	**1/9**	**1/9**	**1/3**
A_2	**1/9**	**1/9**	**1/9**	**1/3**
A_3	**1/9**	**1/9**	**1/9**	**1/3**
	1/3	**1/3**	**1/3**	1

La distribution conjointe est égale au produit des marges : indépendance en probabilité des deux tirages.

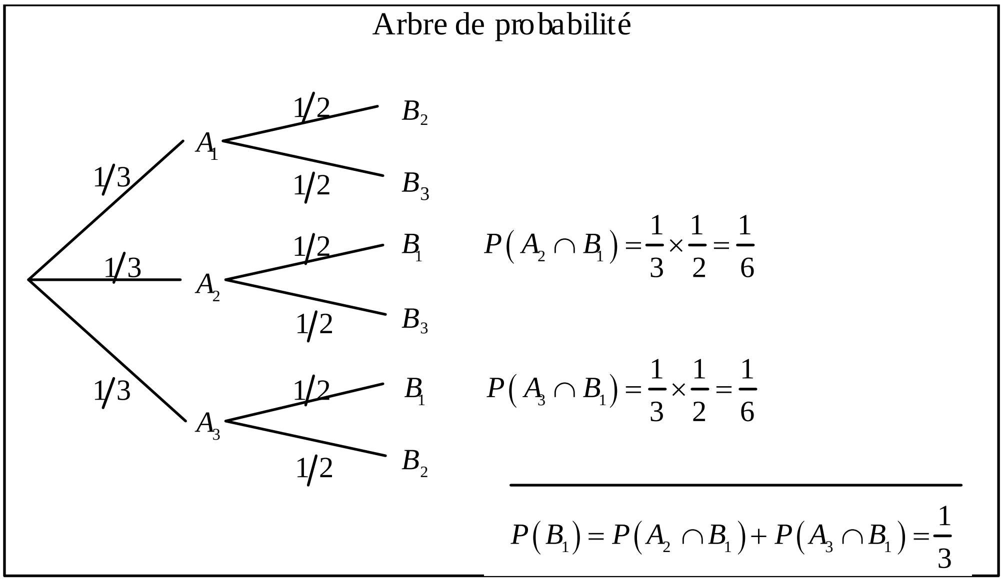
Tirage sans remise

- **Arbre de dénombrement**



$\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$ et P est l'équiprobabilité sur Ω.
On a : $A_1 = \{(1,2),(1,3)\}, A_2 = \{(2,1),(2,3)\}, A_3 = \{(3,1),(3,2)\}$,
$B_1 = \{(2,1),(3,1)\}, B_2 = \{(1,2),(3,2)\}, B_3 = \{(1,3),(2,3)\}$, et, pour tout i de $\{1,2,3\}$ et tout j de $\{1,2,3\}$: $A_i \cap B_j = \{(i,j)\}$ si $i \neq j$, $\varnothing$ sinon.
On déduit : $P(A_i) = \dfrac{1}{3}$, $P(B_j) = \dfrac{1}{3}$ et $P(A_i \cap B_j) = \dfrac{1}{6}$ si $i \neq j$, 0 sinon.

- **Arbre de probabilité**



On a par hypothèse, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $P(A_i) = \dfrac{1}{3}$ et pour tout j de $\{1,2,3\}$ $P_{A_i}(B_j) = \dfrac{1}{2}$ si $i \neq j$, 0 sinon. On en déduit, pour tout pour tout i de $\{1,2,3\}$ et tout j de $\{1,2,3\}$ avec $i \neq j$, $P(\{(i,j)\}) = P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P_{A_i}(B_j) = \left(\dfrac{1}{3}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{6}$ (règle du produit pour un arbre pondéré). On retrouve l'équiprobabilité des événements élémentaires.

Enfin on en déduit : pour tout j de $\{1,2,3\}$, $P\left(B_j\right) = \sum_{i\in\{1,2,3\}} P(A_i \cap B_j) = \sum_{i\in\{1,2,3\}\setminus\{j\}} \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ (règle de la somme pour un arbre pondéré).

- **Tableau : distribution de probabilité conjointe et de distributions marginales des résultats des premier et deuxième tirages.**

2° tirage / 1er tirage	B_1	B_2	B_3	
A_1	0	**1/6**	**1/6**	**1/3**
A_2	**1/6**	0	**1/6**	**1/3**
A_3	**1/6**	**1/6**	0	**1/3**
	1/3	**1/3**	**1/3**	1

La distribution conjointe n'est pas égale au produit des marges, non indépendance en probabilité des deux tirages.